Early Journal Content on JSTOR, Free to Anyone in the World

This article is one of nearly 500,000 scholarly works digitized and made freely available to everyone in the world by JSTOR.

Known as the Early Journal Content, this set of works include research articles, news, letters, and other writings published in more than 200 of the oldest leading academic journals. The works date from the mid-seventeenth to the early twentieth centuries.

We encourage people to read and share the Early Journal Content openly and to tell others that this resource exists. People may post this content online or redistribute in any way for non-commercial purposes.

Read more about Early Journal Content at http://about.jstor.org/participate-jstor/individuals/early-journal-content.

JSTOR is a digital library of academic journals, books, and primary source objects. JSTOR helps people discover, use, and build upon a wide range of content through a powerful research and teaching platform, and preserves this content for future generations. JSTOR is part of ITHAKA, a not-for-profit organization that also includes Ithaka S+R and Portico. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

EIN SEITENSTÜCK ZUR MOEBIUS'SCHEN GEOMETRIE DER KREISVERWANDTSCHAFTEN*

VON

H. BECK

Öfter wiederholt sich in der Mathematik, und insbesondere in der Geometrie, die Erscheinung, dass Gruppen von Lehrsätzen, die durch gleiche logische Prozesse verbunden sind, in sonst verschiedenen Theorieen auftreten. Es entstehen dann sogenannte Übertragungsprinzipe, für die der von S. LIE gefundene Zusammenhang zwischen Liniengeometrie und Kugelgeometrie das wohl berühmteste Beispiel abgibt. Wir erinnern hier an die Tatsache, dass die von MOEBIUS begründete Art von Kugelgeometrie nicht dem Gedankenkreise der Euklidischen Geometrie (aus dem MOEBIUS sie abgeleitet hat) eigentümlich ist, sondern dass sie in gleicher Weise in den verschiedenen Arten von Nicht-Euklidischer Geometrie auftritt. Für Erscheinungen dieser Art hat man in der Sprache der Gruppentheorie einen präzisen Ausdruck gefunden.

In der Kreisgeometrie von MOEBIUS zum Beispiel wird der Begriff des Kreises derart umgrenzt, dass er auch die geraden Linien umfasst, und es werden dann, bei konsequenter Ausgestaltung der Systematik, ausschliesslich solche Eigenschaften dieser "Kreise" betrachtet, die nicht zerstört werden können durch solche Punkttransformationen, die Kreise in Kreise überführen. Diese Transformationen bilden, wie MOEBIUS selbst schon gefunden hat, eine — nach unserer heutigen Ausdrucksweise — gemischte Gruppe (G_6, H_6), deren allgemeine Transformation von sechs Parametern abhängt.

Die kontinuierliche Gruppe G_6 enthält nun dreigliedrige Untergruppen, die nach LIE's Terminologie *ähnlich* sind zu den ebenfalls dreigliedrigen Bewegungsgruppen der Euklidischen und — je nach Wahl der Raumelemente (Punkt oder geeignetes Punktepaar) — der sphärischen oder der elliptischen, sowie der pseudosphärischen oder der hyperbolischen Geometrie. Danach erscheint es dann als vollkommen selbstverständlich, dass in jeder dieser verschiedenen Arten von Maassgeometrie, also in der Euklidischen Geometrie und in den $2 \cdot 2$ Hauptarten der Nicht-Euklidischen Geometrie an bestimmter Stelle die Lehrsätze von MOEBIUS' Kreisgeometrie auftreten müssen. Aber diese Lehrsätze haben, wiewohl sie unter einander die gleiche Verkettung aufweisen, doch nicht die gleiche

* Presented to the Society, September 7, 1910.

Bedeutung; sie ordnen sich in verschiedene Gedankensysteme ein; sie können zwar oftmals mit ähnlichen, nicht aber mit den gleichen Worten beschrieben werden, wenigstens nicht, wenn man auf die ursprünglichen Definitionen zurückgeht: Ein *Kreis* in der sphärischen Geometrie zum Beispiel ist nicht Dasselbe, wie die mit dem gleichen Namen bezeichnete Figur der Euklidischen Geometrie. Eben darin ist das Interesse begründet, das solche Wiederholungen derselben Schlussketten haben können, trotzdem sie Wiederholungen sind.

In andern Fällen ist eine so weitgehende logische Aequivalenz nicht vorhanden. Die projektive Geometrie auf einer Kugel zum Beispiel ist sehr verschieden von der Geometrie auf einem Hyperboloïd. Erst, wenn man den elementaren Standpunkt der naïven Betrachtung mit einem andern vertauscht, offenbart sich auch hier eine weitgehende Übereinstimmung, zu deren Verständnis wiederum die Gruppentheorie den Schlüssel liefert. Denkt man sich nämlich die Gruppen der automorphen Kollineationen von Kugel und Hyperboloïd ins komplexe Gebiet erweitert (analytisch fortgesetzt), so sind diese *erweiterten* Gruppen wiederum zu einander *ähnlich* (nämlich zu einander komplex-projektiv).

Daraus ergibt sich, dass alle Lehrsätze der projektiven Geometrie, in denen reelle Figuren keine Sonderstellung einnehmen, von der Kugel auf das Hyperboloïd übertragen werden können, und umgekehrt. Ebenso verhält es sich mit LIE's Kugelgeometrie und der PLÜCKERschen Liniengeometrie. Man hat in solchen Fällen, wie erklärlich, bisher vielleicht zu viel auf das Gemeinsame der verschiedenen Disziplinen, als auf die doch auch vorhandenen und tiefgreifenden Unterschiede geachtet.

In der vorliegenden Untersuchung sollen nun die bekannten Beispiele solchen Zusammenhanges zwischen Theorieen verschiedenen Ursprungs durch ein weiteres vermehrt werden. Die vorzuführende Art von Konstruktionen verhält sich zu den Konstruktionen von MOEBIUS' Kreisgeometrie, die ja von der projektiven Geometrie auf einer Kugelfläche nicht wesentlich verschieden ist, ganz so, wie die Geometrie auf einem Hyperboloïd zur Geometrie auf der Kugel.

Das zugehörige Übertragungsprinzip gehört also zu der zweiten der beiden eben unterschiedenen Arten; erst im komplexen Gebiete fällt unsere Geometrie in logischer Hinsicht zusammen mit der von MOEBIUS; im Reellen sind sie beide sehr verschieden, unbeschadet des Umstandes, dass die tiefer liegenden Analogieen sich natürlich auch hier schon fühlbar machen.

Die *Geometrie der Zykeln*, von der wir reden wollen, entsteht aus der ebenen hyperbolischen Geometrie, wenn man als Raumelement den *Pfeil* betrachtet, nämlich ein wohlgeordnetes Paar von Punkten auf dem gewöhnlich als Kegelschnitt aufgefassten Ort der unendlich fernen Punkte. Diese Pfeile sind das Analogon zu den *Punkten* der MOEBIUSschen Geometrie. Sie werden den Transformationen einer gewissen Gruppe unterworfen, die zu der zuvor genannten MOEBIUS'schen Gruppe ein Seitenstück ist. Die den Kreisen von

MOEBIUS' Geometrie analogen Figuren endlich sind dann eben die weiterhin zu erklärenden Zykeln.

Da es uns nicht nur darauf ankommt, das Gemeinsame unserer Geometrie der Zykeln mit MOEBIUS' Kreisgeometrie hervortreten zu lassen, sondern uns auch daran gelegen ist, unsere Disziplin selbständig zu entwickeln und das Unterscheidende zu seinem Rechte kommen zu lassen, so stellen wir uns von vorneherein auf den Standpunkt der hyperbolischen Geometrie *des reellen Gebietes*. Alle vorkommenden Grössen und Figuren setzen wir als *reell* voraus.

§ 1. *Der Pfeil.*

Das absolute Polarsystem wählen wir in der Form:

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0, \tag{1}$$

oder in Linienkoordinaten:

$$\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_3 \mathfrak{y}_3 = 0. \tag{2}$$

Dann lässt sich das binäre Punktgebiet des absoluten Kegelschnitts auf folgende Weise darstellen:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 : \lambda_2^2 - \lambda_1^2 : 2\lambda_1\lambda_2. \tag{3}$$

Jedem Werte von $\lambda_1 : \lambda_2$, mit Einschluss des uneigentlichen Wertes ∞, entspricht dann gerade ein unendlich ferner Punkt, und umgekehrt. Als positiv soll die Umlaufsrichtung auf dem absoluten Kegelschnitt bezeichnet werden, in der $\lambda_1 : \lambda_2$ wächst.

Als Raumelement wählen wir den *Pfeil.** Darunter soll verstanden werden die Figur zweier in eine bestimmte Reihenfolge gesetzter Punkte des absoluten Kegelschnitts. Ein Pfeil hat demnach einen *Anfangspunkt* und einen *Endpunkt*. Liegen beide getrennt, so heisst der Pfeil *eigentlich*. Sein *Träger* ist eine zugängliche Gerade. Sie trägt auch den *entgegengesetzten* Pfeil, d. i. den Pfeil, dessen Anfangspunkt und Endpunkt zusammenfallen mit Endpunkt und Anfangspunkt des ersten.

Fällt der Anfangspunkt eines Pfeils mit seinem Endpunkt zusammen, so reden wir von einem *Punktpfeil*. Ein Punktpfeil ist zu sich selbst entgegengesetzt. Die Gesamtheit der Punktpfeile fungiert mithin als Verzweigungsmannigfaltigkeit. Träger eines Punktpfeils ist eine Minimalgerade (Tangente des absoluten Kegelschnitts).

Eine unzugängliche Gerade trägt keine Pfeile.

Ein Pfeil kann durch ein Paar geordneter Zahlen ($\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$, $\mu = \mu_1 : \mu_2$) *dargestellt werden*, wobei (vgl. Gl. 3) $\lambda_1 : \lambda_2$ seinen Anfangspunkt, $\mu_1 : \mu_2$ seinen

* Vgl. analoge Begriffsbildungen bei Hrn. E. STUDY: *Beiträge zur Nicht-Euklidischen Geometrie*; American Journal of Mathematics, vol. 29 (1907); *Über Nicht-Euklidische und Linien-geometrie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 11 (1902), Bd. 15 (1906). Diesen Arbeiten ist die Terminologie grösstenteils nachgebildet.

Endpunkt bedeuten soll. Das System $(\mu_1 : \mu_2, \lambda_1 : \lambda_2)$ gibt dann den entgegengesetzten Pfeil. Verschwindet der Ausdruck

$$(\lambda\mu) = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1, \tag{4}$$

so liegt ein Punktpfeil vor. Die Zahlen $\lambda_1 : \lambda_2$, $\mu_1 : \mu_2$ sollen *Pfeilparameter* genannt werden.

Die Gesamtheit der ∞^2 eigentlichen Pfeile wird durch die ∞^1 Punktpfeile zu einem abgeschlossenen Kontinuum ergänzt.

Zwei Pfeile mit zusammenfallenden Anfangspunkten werden *α-parallel* genannt. Entsprechend heissen Pfeile *ω-parallel*, wenn sie gemeinsame Endpunkte besitzen.

Sind zwei Pfeile zu einem dritten α-parallel (ω-parallel), so sind sie es auch zu einander. Zwei Pfeile, die zugleich α-parallel und ω-parallel sind, fallen zusammen. Zwei Punktpfeile können parallel nur sein, wenn sie zusammen fallen. Durch einen Punkt, der dem absoluten Kegelschnitt nicht angehört, gibt es zu einem Pfeil stets gerade einen α-parallelen und einen ω-parallelen Pfeil.

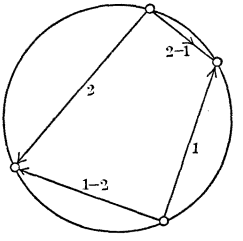


FIG. 1.

Es gibt stets einen einzigen Pfeil, der zu einem ersten Pfeil α-parallel und zu einem zweiten Pfeil ω-parallel ist. Er soll *Verbindungspfeil* (1–2) genannt werden (nicht zu verwechseln mit dem Verbindungspfeil (2–1)). Vgl. Fig. 1.

Die Konstruktion des Verbindens eines ersten Pfeils mit einem zweiten ist stets, *ohne irgend welche Ausnahmen* ausführbar.

Als Koordinaten der geraden Linie $\mathfrak{x}$, die den Pfeil (λ, μ) trägt, findet man:

$$\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = -(\lambda_2\mu_2 + \lambda_1\mu_1) : \lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_1 : \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1.$$

Setzt man noch:

$$\mathfrak{x}_0 = (\lambda\mu) = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1, \tag{5}$$

so dürfen die vier Verhältnisgrössen

$$\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 : -(\lambda_2\mu_2 + \lambda_1\mu_1) : \lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_1 : \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 \tag{6}$$

als *Pfeilkoordinaten* verwandt werden. Zwischen ihnen besteht dann die Relation:

$$\mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{x}_1^2 - \mathfrak{x}_2^2 - \mathfrak{x}_3^2 = 0. \tag{7}$$

Die Systeme $\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3$ und $-\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3$ ergeben entgegengesetzte Pfeile. Für Punktpfeile hat man: $\mathfrak{x}_0 = 0$.

Durch die *Koordinaten* eines Pfeils sind auch wieder dessen *Parameter* vollkommen bestimmt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 : \lambda_2 &= \mathfrak{x}_3 + \mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 : -\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{x}_0 \\ \mu_1 : \mu_2 &= \mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 : -\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_0 \end{aligned} \tag{8}$$

Die Gleichung (7) zeigt:

Das Pfeilkontinuum lässt sich ausnahmslos eindeutig umkehrbar abbilden auf die Gesamtheit der Punkte einer singularitätenfreien geradlinigen Fläche zweiter Ordnung.

Diese Fläche, die als einschaliges Hyperboloïd angesehen werden darf, soll kurz *Parasphäre* genannt werden. Entgegengesetzten Pfeilen können zwei Punkte der Parasphäre zugeordnet werden, deren Verbindungsgerade den Mittelpunkt der Fläche trifft. Die Punktpfeile werden dann abgebildet auf den Schnitt der Parasphäre mit der uneigentlichen Ebene des R_3.

Die Pfeilparameter können mit den passend gewählten Parametern der Erzeugenden der Fläche identifiziert werden, sodass sich z. B. entsprechen:

Anfangspunkt eines Pfeils,	Link-seitige Erzeugende;
Endpunkt eines Pfeils,	Recht-seitige Erzeugende;
α-parallele (ω-parallele) Pfeile,	Punkte derselben link-(recht-)seitigen Erzeugenden.

§ 2. *Die parazyklische Gruppe.*

Zu dem erklärten Pfeilkontinuum gehört eine sechsgliedrige Transformationsgruppe, deren reelle Transformationen die Pfeile in der Weise unter einander vertauschen, dass die Anfangspunkte für sich und die Endpunkte für sich *projectiv* unter einander vertauscht werden:

$$(9)\quad \begin{aligned} \lambda_1' &= (\alpha_0+\alpha_3)\lambda_1 + (\alpha_2-\alpha_1)\lambda_2, & \mu_1' &= (\beta_0+\beta_3)\mu_1 + (\beta_2-\beta_1)\mu_2,\\ \lambda_2' &= (\alpha_2+\alpha_1)\lambda_1 + (\alpha_0-\alpha_3)\lambda_2. & \mu_2' &= (\beta_2+\beta_1)\mu_1 + (\beta_0-\beta_3)\mu_2.\\ N(\alpha) &= \alpha_0^2+\alpha_1^2-\alpha_2^2-\alpha_3^2 \neq 0, & N(\beta) &= \beta_0^2+\beta_1^2-\beta_2^2-\beta_3^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Wir nennen sie die *parazyklische* Gruppe und bezeichnen sie kurz als G_6. Die genannten reellen Transformationen umfassen vier getrennte Transformationsscharen, die durch folgende Ungleichungen charakterisiert sind:

$$N(\alpha)>0,\ N(\beta)>0;\ N(\alpha)>0,\ N(\beta)<0;$$
$$N(\alpha)<0,\ N(\beta)>0;\ N(\alpha)<0,\ N(\beta)<0.$$

Die erste Schar bildet mit jeder der drei übrigen zusammen eine Gruppe; die von den Transformationen der ersten und vierten Schar $[N(\alpha)\cdot N(\beta)>0]$ gebildete Gruppe werden wir die *engere* Gruppe nennen und mit G_6' bezeichnen.

Eine parazyklische Transformation verwandelt Punktpfeile im Allgemeinen nicht wieder in solche; sie zerstört die Eigenschaft zweier Pfeile, entgegengesetzt zu sein. Dagegen bleibt α-Parallelismus (und ω-Parallelismus) erhalten, denn es gelten die Gleichungen:

$$(\lambda'l') = N(\alpha)\cdot(\lambda l), \qquad (\mu'm') = N(\beta)\cdot(\mu m),$$

wo $(l_1:l_2,\ m_1:m_2)$ einen zweiten Pfeil bedeutet.

Die Gruppe G_6 kann leicht in Pfeil*koordinaten* dargestellt werden; man kann sie folgendermassen schreiben:

$$\mathfrak{x}_i' = c_{i0}\mathfrak{x}_0 + c_{i1}\mathfrak{x}_1 + c_{i2}\mathfrak{x}_2 + c_{i3}\mathfrak{x}_3. \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{10}$$

Darin haben die c_{ik} nachstehende Werte:

$$\begin{aligned} c_{00} &= \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3, \\ c_{11} &= \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3, \\ c_{22} &= \alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3, \\ c_{33} &= \alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} c_{01} &= -\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, & c_{10} &= \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \\ c_{02} &= -\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3, & c_{20} &= -\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \\ c_{03} &= -\alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 - \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1, & c_{30} &= -\alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{23} &= \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 - \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, & c_{32} &= -\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 - \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \\ c_{31} &= -\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, & c_{13} &= -\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3, \\ c_{12} &= \alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1, & c_{21} &= \alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \end{aligned}$$

Es ist dann:

$$\mathfrak{x}_0'\mathfrak{y}_0' + \mathfrak{x}_1'\mathfrak{y}_1' - \mathfrak{x}_2'\mathfrak{y}_2' - \mathfrak{x}_3'\mathfrak{y}_3' = N(\alpha)\cdot N(\beta)\cdot(\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3),$$

wo die $\mathfrak{y}$ die Koordinaten des Pfeils mit den Parametern $(l_1 : l_2,\ m_1 : m_2)$ sind. Die geometrische Bedeutung des Verschwindens der so gefundenen Simultaninvariante ergibt sich sofort aus der Gleichung:

$$\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3 = 2(\lambda l)(\mu m).$$

Die parazyklische Gruppe lässt sich aber eleganter darstellen. Dabei wird sich zeigen, dass die den Gleichungen (10) anhaftenden Unsymmetrieen nicht vermieden werden können.

Wir bedienen uns eines Systems komplexer Zahlen in vier Einheiten mit folgender Multiplikationstafel:*

$$\begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -e_0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & e_0 & -e_1 \\ e_3 & e_2 & e_1 & e_0 \end{array} \tag{11}$$

* Das System wird aus dem der Hamiltonschen Quaternionen durch eine lineare nicht reelle Transformation erhalten. Vgl. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, I A 4, p. 167, *Zweite Gestalt der Quaternionen.* Das dort unter VI^b angegebene System bedarf nur ganz geringfügiger Abänderung, die hier aber zweckmässig erscheint, um in die Form (11) überzugehen.

Es sei nun:

$$\dot{\alpha} = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \qquad \dot{\beta} = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3.$$

Weiter bedeute $\underline{\dot{\alpha}} = \alpha_0 e_0 - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3$ die zu $\dot{\alpha}$ *konjugierte* Quaternion. Dann ist, da e_0 der positiven reellen Einheit gleich gesetzt werden darf:

$$\dot{\alpha}\cdot\underline{\dot{\alpha}} = \underline{\dot{\alpha}}\cdot\dot{\alpha} = N(\alpha)\cdot e_0 = N(\alpha).$$

Ist $\dot{\gamma} = \dot{\alpha}\cdot\dot{\beta}$, so gelten auch die folgenden beiden Gleichungen:

$$\underline{\dot{\gamma}} = \underline{\dot{\beta}}\cdot\underline{\dot{\alpha}}, \qquad N(\gamma) = N(\alpha)\cdot N(\beta).$$

Man darf durch $\dot{\alpha}$ dividieren, solange $N(\alpha) \neq 0$.

Setzen wir noch:

$$\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}_0 e_0 + \mathfrak{x}_1 e_1 - \mathfrak{x}_2 e_2 - \mathfrak{x}_3 e_3,$$

so stellt sich die parazyklische Gruppe durch die eine Formel dar:

$$\dot{\mathfrak{x}}' = \underline{\dot{\alpha}}\cdot\dot{\mathfrak{x}}\cdot\dot{\beta}. \tag{12}$$

Die beiden Grössensysteme α_i und β_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ sollen *Parameter* der parazyklischen Transformation genannt werden. Jedes dieser Systeme darf, wie die Gleichungen (9) zeigen, noch mit einem beliebigen (nicht verschwindenden) Zahlenfaktor multipliziert werden, ohne dass die dargestellte Transformation sich ändert.

Es ist nun leicht, mehrere parazyklische Transformationen hintereinander auszuführen. Bedeutet nämlich $S_{\alpha\beta}$ die Transformation mit den Parametern α_i, β_i $(i = 0, 1, 2, 3)$, und ist (in WIENERscher Bezeichnung)

$$\mathfrak{x}\{S_{\alpha\beta}\}\mathfrak{x}'\{S_{\alpha'\beta'}\}\mathfrak{x}'' = \mathfrak{x}\{S_{\alpha''\beta''}\}\mathfrak{x}'',$$

so erhält man:

$$\dot{\mathfrak{x}}'' = \underline{\dot{\alpha}'}\cdot\dot{\mathfrak{x}}'\cdot\dot{\beta}' = \underline{\dot{\alpha}'}\cdot\underline{\dot{\alpha}}\cdot\dot{\mathfrak{x}}\cdot\dot{\beta}\cdot\dot{\beta}' = \underline{\dot{\alpha}''}\cdot\dot{\mathfrak{x}}\cdot\dot{\beta}'',$$

wenn die neuen Quaternionen $\dot{\alpha}''$ und $\dot{\beta}''$ folgende Bedeutung haben:

$$\dot{\alpha}'' = \dot{\alpha}\cdot\dot{\alpha}', \qquad \dot{\beta}'' = \dot{\beta}\cdot\dot{\beta}'. \tag{13}$$

Die Gleichung:

$$N(\alpha'')\cdot N(\beta'') = N(\alpha)\cdot N(\beta)\cdot N(\alpha')\cdot N(\beta')$$

zeigt, wie die engere Gruppe G_6' zu Stande kommt.

Es gibt stets eine und nur eine parazyklische Transformation, die die Figur dreier wohlgeordneter Pfeile, von denen keine zwei parallel sind, in eine gegebene ebensolche Figur überführt.

§ 3. *Der Zykel.*

Die einfachsten Pfeilmannigfaltigkeiten sind die, deren Gleichungen (in Pfeil*parametern* dargestellt) linear oder bilinear sind.

Es gibt zwei Arten von *linearen* Pfeilmannigfaltigkeiten:

$$(p\lambda) = 0. \qquad (q\mu) = 0.$$

Die Gleichung $(p\lambda) = 0$ stellt ein *Büschel α-paralleler Pfeile* dar, oder wie wir kurz sagen wollen, ein *α-Büschel.* Entsprechend bedeutet die zweite Gleichung ein *ω-Büschel.* Beide Gebilde sind Träger binärer Gebiete.

Jeder Pfeil bestimmt ein einziges α-Büschel und ein einziges ω-Büschel. Ein α-Büschel und ein ω-Büschel durchdringen sich stets in einem einzigen Pfeil. Zwei getrennte α-Büschel (ω-Büschel) haben niemals einen Pfeil gemeinsam.

Die ∞^1 α-Büschel bilden eine einzige Klasse bereits gegenüber den Transformationen einer jeden der vier Scharen, ebenso die ∞^1 ω-Büschel. Ein α-Büschel kann aber durch eine Transformation von G_6 niemals in ein ω-Büschel übergeführt werden (doch vgl. § 4).

Verbindet man einen Pfeil mit sämtlichen Pfeilen eines α-Büschels (ω-Büschels), so entsteht ein α-Büschel (ein einziger Pfeil).

Verbindet man sämtliche Pfeile eines α-Büschels (ω-Büschels) mit einem Pfeil, so entsteht ein einziger Pfeil (ein ω-Büschel). —

Jede *bilineare* Pfeilmannigfaltigkeit ist in der folgenden Form enthalten:

$$a_{11}\lambda_1\mu_1 + a_{12}\lambda_1\mu_2 + a_{21}\lambda_2\mu_1 + a_{22}\lambda_2\mu_2 = 0. \tag{14}$$

Alle durch solche Gleichungen dargestellten Gebilde sollen *Zykeln* genannt werden.

Der Zykel heisst *reduzibel*, sobald seine *Diskriminante*

$$\tfrac{1}{2}D_{aa} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{15}$$

verschwindet. Er besteht dann aus einem α-Büschel und einem ω-Büschel. Er besitzt einen *Mittelpfeil*, den Durchdringungspfeil der beiden Büschel.

Durch irgend drei getrennte Pfeile, von denen gerade zwei parallel sind, geht stets ein und nur ein reduzibler Zykel. Die ∞^2 reduziblen Zykeln bilden eine einzige Klasse gegenüber den Transformationen einer jeden der vier Scharen von G_6.

Zwei getrennte reduzible Zykeln durchdringen sich in zwei getrennten Pfeilen, oder sie haben ein ganzes α-Büschel (ω-Büschel) gemeinsam (*orthogonale* Zykeln, vgl. später § 5).

Liegt ein α-Büschel (ω-Büschel) nicht ganz in einem reduziblen Zykel, so haben beide Figuren stets einen einzigen Pfeil gemeinsam. —

Durch drei getrennte Pfeile, von denen keine zwei α-parallel oder ω-parallel sind, geht stets ein einziger irreduzibler Zykel.

Um mit diesem Begriff gleich eine Anschauung zu verbinden, betrachten wir, indem wir die Ergebnisse späterer Entwicklungen (§ 7) antizipieren, die verschiedenen Gestalten der irreduziblen Zykeln.

Zunächst ist zu nennen der absolute Kegelschnitt (als Ort aller Punktpfeile). Ferner jeder zugängliche Punkt (als Ort aller Pfeile, deren Träger durch ihn hindurchgehen) und jede zugängliche Gerade (als Ort der Pfeile, von deren Trägern sie senkrecht geschnitten wird).

Die übrigen irreduziblen Zykeln lassen sich in der Weise zu Paaren anordnen, dass von den beiden Zykeln eines Paares jeder aus dem anderen hervorgeht, wenn man jeden Zykelpfeil in den entgegengesetzten Pfeil verwandelt. Zu den beiden Zykeln eines Paares gehört demnach ein und dieselbe Geradenmannigfaltigkeit, und diese umhüllt eine irreduzible Kurve 2. Klasse (und 2. Ordnung), die den absoluten Kegelschnitt doppelt berührt (wobei noch die beiden Berührungspunkte zusammenfallen können). Dadurch, dass man diese Kurven (oder ihre im Unendlichen zusammenhängenden Zweige) *orientiert*, kann man die beiden Zykeln des zugehörigen Paares anschaulich unterscheiden.

Doch können von den angeführten Kurven nur diejenigen Zykeln liefern, die überhaupt zugängliche Tangenten besitzen. Indem wir für diese Kurven die in der hyperbolischen Geometrie üblichen Benennungen verwenden, erhalten wir folgende Zusammenstellung:

1. Zugängliche Kreise mit bestimmtem Umlaufssinn (Fig. 2).

2. Zugängliche Abstandskurven (LIEBMANN), *deren Zweige in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden* (Fig. 3).

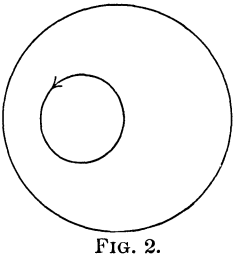


FIG. 2.

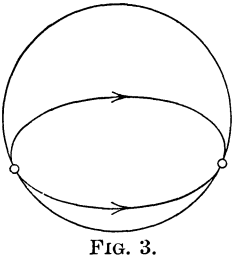


FIG. 3.

3. Zugängliche Grenzkurven, deren zugänglicher Zug in bestimmter Richtung durchlaufen wird (Fig. 4).

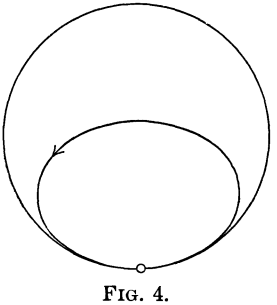


FIG. 4.

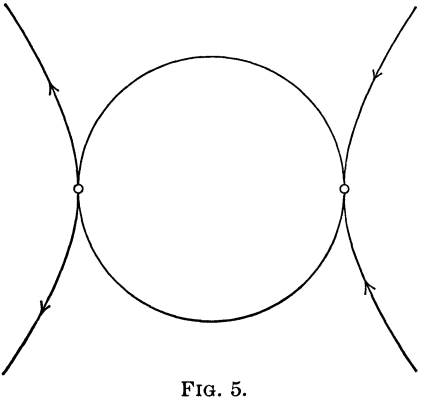


FIG. 5.

4. Unzugängliche Kurven zweiter Ordnung (und zweiter Klasse), die mit dem absoluten Kegelschnitt in *reeller* Doppelberührung liegen, und *deren Tangenten ins zugängliche Gebiet eindringen.* Die Orientierung ist aus der Figur 5 ersichtlich. —

Üben wir auf den durch die Gleichung (14) dargestellten Zykel die parazyklische Transformation $S_{\alpha\beta}$ aus, so reproduziert sich die Diskriminante bis auf den Faktor $N(\alpha) \cdot N(\beta)$:

Die ∞^3 irreduziblen Zykeln bilden eine einzige Klasse gegenüber den Transformationen der Gruppe G_6. Lässt man dagegen nur Transformationen von G_6' zu, so erweist sich das Vorzeichen der Diskriminante als wesentlich, und man hat *zwei* Klassen. Von den *eigentlichen* irreduziblen Zykeln ($D > 0$) sind dann zu unterscheiden die *uneigentlichen* ($D < 0$). Zu den uneigentlichen irreduziblen Zykeln gehören ausser den Geradenzykeln (§ 6) nur noch jene, bei denen die von den Pfeilen umhüllte Kurve zweiter Ordnung und Klasse im unzugänglichen Gebiet liegt (Fig. 5).

Ein α-Büschel (ω-Büschel) und ein irreduzibler Zykel haben stets einen einzigen gemeinsamen Pfeil, und umgekehrt:

*Eine Pfeilmannigfaltigkeit, die mit jedem α-Büschel und jedem ω-Büschel gerade einen Pfeil gemeinsam hat, ist ein irreduzibler Zykel.**

Zwei getrennte irreduzible Zykeln haben zwei, einen oder keinen gemeinsamen Pfeil. Ein reduzibler und ein irreduzibler Zykel durchdringen sich in einem oder in zwei Pfeilen.

Die Gesamtheit der ∞^3 Zykeln lässt sich durchaus eindeutig umkehrbar abbilden auf die Gesamtheit der Ebenen des R_3.

Den reduziblen Zykeln entsprechen dabei die Ebenen einer singularitätenfreien Fläche zweiter Klasse. Diese Fläche kann mit der Parasphäre identifiziert werden. Ferner lässt sich die Abbildung so einrichten, dass sich entspricht:

vereinigte Lage von Pfeil und Zykel,	vereinigte Lage von Bildpunkt auf der Parasphäre mit Bildebene.

Um diesen Gedanken auszuführen, beachten wir, dass sich die Gleichung (14) des Zykels in folgender Gestalt schreiben lässt:

$$[A\mathfrak{x}] = A_0\mathfrak{x}_0 + A_1\mathfrak{x}_1 + A_2\mathfrak{x}_2 + A_3\mathfrak{x}_3 = 0. \tag{16}$$

* Dieser Satz bedarf aber, um nicht falsch verstanden zu werden, einer Erläuterung. In der Tat hat ja jedes orientierte zugängliche Oval, als Ort von Pfeilen aufgefasst, mit jedem α-Büschel (ω-Büschel) gerade einen Pfeil gemeinsam; aber die Aufgabe, die Durchdringungspfeile einer solchen Pfeilmannigfaltigkeit mit einem α-Büschel (ω-Büschel) zu finden, führt auf *nicht-lineare* Gleichungen für die Parameter. Erst wenn man durch Einführung komplexer Pfeile den irreduziblen Zykel zu einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit erweitert, und auch den Begriff des irreduziblen Zykels sachgemäss abändert, würde der Satz im Text ohne weitere Zusätze richtig sein.

Dabei haben die A nachstehende Bedeutung:

$$(17)\quad 2A_0 : 2A_1 : 2A_2 : 2A_3 = a_{12} - a_{21} : -(a_{11} + a_{22}) : a_{22} - a_{11} : a_{12} + a_{21}.$$

Die vier Verhältnisgrössen A_i sollen als *Zykelkoordinaten* verwandt werden. Deuten wir sie als Ebenenkoordinaten im R_3, so ist damit die eben erwähnte Abbildung vollzogen.

Man erkennt leicht die Richtigkeit folgender Gleichung:

$$(18)\quad 2\cdot(A_0B_0 + A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3) = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12},$$

wofür wir kürzer schreiben

$$(18)\qquad 2\cdot(AB) = D_{ab}.$$

Eigentlichen (uneigentlichen) irreduziblen Zykeln entsprechen also bei der Abbildung auf die Parasphäre solche Ebenen, deren Pole inbezug auf die Parasphäre innerhalb (ausserhalb)* der Fläche liegen.

Die parazyklische Gruppe geht bei dieser Abbildung über in eine sechsgliedrige projektive Gruppe des R_3, deren Transformationen die Parasphäre in Ruhe lassen. Jetzt erkennt man sofort den tieferen Unterschied zwischen den Transformationen der vier in § 2 erwähnten Scharen. Ist nämlich $N(\alpha)\cdot N(\beta) < 0$, so werden die beiden Gebiete, die wir soeben als Inneres und Äusseres der Parasphäre unterschieden haben, vertauscht.

Für reduzible Zykeln hat man (vgl. Gl. 15)

$$(AA) = \tfrac{1}{2}D_{aa} = 0.$$

§ 4. *Erweiterung der parazyklischen Gruppe.*

Gegenüber parazyklischen Transformationen besitzt die Figur von irgend vier Pfeilen *zwei unabhängige* absolute Invarianten, die wir als α-Doppelverhältnis und ω-Doppelverhältnis bezeichnen:

$$(1234)_\alpha = \frac{(\lambda_1\lambda_3)\cdot(\lambda_4\lambda_2)}{(\lambda_1\lambda_4)\cdot(\lambda_3\lambda_2)}; \qquad (1234)_\omega = \frac{(\mu_1\mu_3)\cdot(\mu_4\mu_2)}{(\mu_1\mu_4)\cdot(\mu_3\mu_2)}.$$

Dabei sind durch die Indizes jetzt nicht Pfeil*parameter*, sondern *Pfeile* unterschieden.

Für irgend vier Pfeile eines α-Büschels (ω-Büschels) ist das α-Doppelverhältnis (ω-Doppelverhältnis) unbestimmt.

Das α-Doppelverhältnis von vier Pfeilen eines irreduziblen Zykels ist gleich ihrem ω-Doppelverhältnis. Umgekehrt:

Ist das α-Doppelverhältnis von vier Pfeilen, von denen keine zwei α-parallel oder ω-parallel sind, gleich ihrem ω-Doppelverhältnis, so gehören die vier Pfeile einem irreduziblen Zykel an.

* Als *innerhalb* bezeichnen wir das Gebiet, in dem der Pol der uneigentlichen Ebene liegt.

Die Gruppe G_6 der parazyklischen Pfeiltransformationen erweitern wir noch durch Hinzufügung der *absoluten Spiegelung*,* d. i. der ausgezeichneten Transformation, die alle Pfeile umkehrt:

$$\begin{gathered}\lambda_1' : \lambda_2' = \mu_1 : \mu_2, \qquad \mu_1 : \mu_2' = \lambda_1 : \lambda_2, \\ \mathfrak{x}_0' : \mathfrak{x}_1' : \mathfrak{x}_2' : \mathfrak{x}_3' = -\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3, \\ \dot{\mathfrak{x}}' = \underline{\dot{\mathfrak{x}}}. \end{gathered} \tag{19}$$

Aus den parazyklischen Transformationen gehen so hervor die *antiparazyklischen:*

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= (\alpha_0 + \alpha_3)\mu_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\mu_2, & \mu_1' &= (\beta_0 + \beta_3)\lambda_1 + (\beta_2 - \beta_1)\lambda_2, \\ \lambda_2' &= (\alpha_2 + \alpha_1)\mu_1 + (\alpha_0 - \alpha_3)\mu_2, & \mu_2' &= (\beta_2 + \beta_1)\lambda_1 + (\beta_0 - \beta_3)\lambda_2, \\ N(\alpha) &\neq 0, & N(\beta) &\neq 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Sie können vermittelst unserer Quaternionen in die kurze Formel zusammengefasst werden:

$$\dot{\mathfrak{x}}' = \dot{\underline{\alpha}} \cdot \dot{\mathfrak{x}} \cdot \beta. \tag{21}$$

Die α_i, $\beta_i (i = 0, 1, 2, 3)$ sollen wieder die Parameter der Transformation heissen. Die Zusammensetzung irgend zweier Transformationen der gemischten Gruppe (G_6, H_6) bietet jetzt keine Schwierigkeit:

Es sei $S_{\alpha\beta}$ $(T_{\alpha\beta})$ die parazyklische (antiparazyklische) Transformation mit den Parametern α_i, β_i. Dann hat man (vgl. § 2):

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} \cdot S_{\alpha'\beta'} &= S_{\alpha''\beta''} \\ T_{\alpha\beta} \cdot S_{\alpha'\beta'} &= T_{\alpha''\beta''} \end{aligned} \Big\} \dot{\alpha}'' = \dot{\alpha} \cdot \dot{\alpha}', \quad \dot{\beta}'' = \dot{\beta} \cdot \dot{\beta}',$$

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} \cdot T_{\alpha'\beta'} &= T_{\alpha''\beta''} \\ T_{\alpha\beta} \cdot T_{\alpha'\beta'} &= S_{\alpha''\beta''} \end{aligned} \Big\} \dot{\alpha}'' = \dot{\beta} \cdot \dot{\alpha}', \quad \dot{\beta}'' = \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta}'. \tag{22}$$

Auch die Gesamtheit H_6 der antiparazyklischen Transformationen zerfällt in vier getrennte Scharen, die entsprechend, wie die von G_6 charakterisiert sind. Die Gruppe (G_6, H_6) enthält wieder eine sechsgliedrige Untergruppe (G_6', H_6'), charakterisiert durch die Ungleichung

$$N(\alpha) \cdot N(\beta) > 0.$$

Eine antiparazyklische Transformation vertauscht α-Parallelismus und ω-Parallelismus; sie vertauscht ferner das α-Doppelverhältnis mit dem ω-Doppelverhältnis.

Die Gruppe (G_6, H_6) umfasst alle Transformationen von Pfeilen, die Büschel paralleler Pfeile in ebensolche, und Zykeln in Zykeln überführen.

* Der Name wird weiterhin (§ 5) motiviert werden.

Die letzte Hälfte dieses Satzes kann auch folgendermassen präzisiert werden:

Es gibt stets eine einzige *antiparazyklische* Transformation, die die Figur dreier wohlge ordneter Pfeile, von denen keine zwei parallel sind, in eine vorgegebene Figur derselben Eigenschaft überführt.

Gegenüber der Gruppe (G_6, H_6) gibt es nur noch *eine* Klasse von Büscheln paralleler Pfeile (vgl. § 3).

Bei der am Schlusse des vorigen Abschnitts erwähnten Abbildung der Zykeln auf den Ebenenraum geht die Gruppe (G_6, H_6) über in die Gruppe *aller* projektiven Transformationen der R_3, die die Parasphäre in Ruhe lassen, (G_6', H_6') in die Gruppe *aller* projektiven Transformationen des R_3, die ausserdem die beiden Seiten der Parasphäre nicht vertauschen.

§ 5. *Spiegelung am Zykel.*

Mit jedem *irreduziblen* Zykel A ist eine *involutorische antiparazyklische* Pfeiltransformation verbunden, die wir als *Spiegelung am Zykel A* bezeichnen:

$$(23)\quad \begin{aligned} \lambda_1' &= (A_0 - A_3)\mu_1 + (A_1 - A_2)\mu_2, \quad \mu_1' = (A_0 + A_3)\lambda_1 + (A_2 - A_1)\lambda_2, \\ \lambda_2' &= -(A_1 + A_2)\mu_1 + (A_0 + A_3)\mu_2, \quad \mu_2' = (A_2 + A_1)\lambda_1 + (A_0 - A_3)\lambda_2. \end{aligned}$$

Von zwei durch diese Transformation zugeordneten Pfeilen sagen wir: jeder liegt *invers* zum andern inbezug auf den Zykel A.

Liegen zwei Pfeile invers inbezug auf den irreduziblen Zykel A, so gehören ihre beiden Verbindungspfeile dem Zykel an.

Dieser Satz liefert eine höchst einfache Lösung der Aufgabe:

Einen Pfeil (λ, μ) *an einem irreduziblen Zykel A zu spiegeln.* (Fig. 6.)

Man zieht die beiden Zykelpfeile, die dem gegebenen parallel sind. Sie ergeben gerade noch einen Verbindungspfeil; dieser ist der gesuchte zu (λ, μ) inbezug auf A invers liegende (λ', μ'). Die Konstruktion versagt niemals.

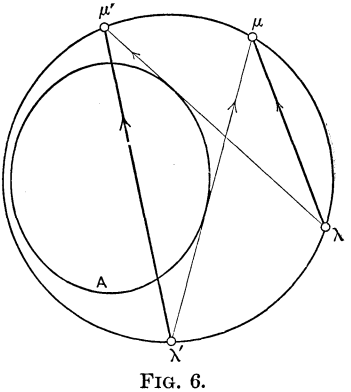


FIG. 6.

Jeder Pfeil liegt zu dem entgegengesetzten Pfeil invers inbezug auf den Zykel der Punktpfeile. Dieser wird später als *absoluter* Zykel bezeichnet werden, und daraus motiviert sich die Bezeichnung absolute Spiegelung (§ 4) für die ausgezeichnete Transformation, die alle Pfeile umkehrt.

Die Pfeile des spiegelnden Zykels selbst, und nur diese, sind ihre eigenen Spiegelbilder.

Das Spiegelbild eines α-Büschels ist ein ω-Büschel, das eines irreduziblen

(reduziblen) Zykels wieder ein irreduzibler (reduzibler) Zykel. Eigentliche (uneigentliche) Zykeln werden wieder in eigentliche (uneigentliche) übergeführt.

Bilden wir die Gleichungen (23) für einen *reduziblen* Zykel, so verschwinden die Transformationsdeterminanten. Von Spiegelungen an reduziblen Zykeln reden wir daher nicht.

Durch Zusammensetzung einer geraden (ungeraden) Anzahl von Spiegelungen an Zykeln erhält man alle parazyklischen (antiparazyklischen) Transformationen *der engeren Gruppe* (G_6', H_6').

Die Transformationen von (G_6, H_6), die der engeren Gruppe (G_6', H_6') nicht angehören, können nicht durch involutorische parazyklische oder antiparazyklische Pfeiltransformationen erhalten werden.

Wir stellen die Spiegelung am Zykel A nunmehr auch in *Pfeilkoordinaten* auf.

$$\begin{aligned} -\mathfrak{x}_0' &= 2\cdot A_0\cdot[A\mathfrak{x}] - (AA)\mathfrak{x}_0,\\ -\mathfrak{x}_1' &= 2\cdot A_1\cdot[A\mathfrak{x}] - (AA)\mathfrak{x}_1,\\ -\mathfrak{x}_2' &= -2\cdot A_2\cdot[A\mathfrak{x}] - (AA)\mathfrak{x}_2,\\ -\mathfrak{x}_3' &= -2\cdot A_3\cdot[A\mathfrak{x}] - (AA)\mathfrak{x}_3. \end{aligned} \tag{24}$$

Bei Benutzung von *Zykel*koordinaten hat man:

$$\begin{gathered} X_i' = (AA)X_i - 2(AX)A_i, \qquad (i=0,1,2,3),\\ (X'X') = (AA)^2\cdot(XX), \qquad (X'Y') = (AA)^2\cdot(XY). \end{gathered} \tag{25}$$

Bei der Spiegelung an einem Zykel bleiben (ausser ihm selbst) ∞^2 Zykeln einzeln in Ruhe. Diese sollen zum spiegelnden Zykel *orthogonal* genannt werden. Ist ein irreduzibler Zykel Y orthogonal zu dem irreduziblen Zykel X, so ist auch X orthogonal zu Y. Diese Beziehung wird ausgedrückt durch eine symmetrische Gleichung (vgl. Gl. 18)

$$(XY) = 0.$$

Diese Gleichung *definiert* die orthogonale Lage eines irreduziblen (oder reduziblen) Zykels zu einem *reduziblen*, wo die obige Erklärung versagt. Aus der Symmetrie dieser Gleichung folgt, dass man jetzt allgemein von *zu einander* orthogonalen Zykeln reden darf. Jetzt wird auch die bereits in § 3 gebrauchte Bezeichnung orthogonale Lage zweier reduzibler Zykeln gegeneinander motiviert; insonderheit darf jeder reduzible Zykel orthogonal zu sich selbst genannt werden.

Orthogonale Lage zweier Zykeln bleibt bei jeder parazyklischen und jeder antiparazyklischen Transformation erhalten, d. i. auch dann, wenn die Transformation nicht in der Gruppe (G_6', H_6') enthalten ist.

Die hier aufgetretenen Analogieen mit der Lehre von den MOEBIUS'schen

Kreisverwandtschaften erstrecken sich noch auf eine Reihe von weiteren Sätzen, bei deren Aufzählung wir uns kurz fassen werden. Nur abweichendes Verhalten soll besonders betont werden.

Die Figur aller ∞^2 Zykeln, die zu einem Zykel orthogonal liegen, bildet ein *Zykelbündel*. Der Zykel, zu dem alle Zykeln des Bündels orthogonal liegen, heisse *Mittelzykel* des Zykelbündels; er gehört dem Zykelbündel aber nur dann an, wenn er *reduzibel* ist. Wir klassifizieren die Zykelbündel:

1. Mittelzykel irreduzibel ∞^3. Eine Klasse.
   - *a*. Mittelzykel eigentlich ∞^3. Eine Klasse.
   - *b*. Mittelzykel uneigentlich ∞^3. Eine Klasse.
2. Mittelzykel reduzibel ∞^2. Eine Klasse.

Die Einteilung (1, 2, ···) soll sich (wie auch bei der Klassifikation der Zykel*büschel*) auf die Gruppe (G_6, H_6) beziehen, während die Einteilung (a, b) sich ergibt, wenn man nur Transformationen von (G'_6, H'_6) zulässt. Es gibt also gegenüber (G_6, H_6) *zwei*, gegenüber (G'_6, H'_6) *drei* Klassen von Zykelbündeln.

Zwei getrennte Zykelbündel durchdringen einander in einem *Zykelbüschel*. Diese werden klassifiziert durch Betrachtung der in ihnen enthaltenen reduziblen Zykeln.

1. Kein reduzibler Zykel. ∞^4. Eine Klasse gegenüber (G_6, H_6), zwei Klassen gegenüber (G'_6, H'_6):
   - *a*. Das Büschel besteht ganz aus eigentlichen Zykeln. ∞^4. Eine Klasse.
   - *b*. Das Büschel besteht ganz aus uneigentlichen Zykeln ∞^4. Eine Klasse.
2. Zwei getrennte reduzible Zykeln. ∞^4. Eine Klasse.
3. Ein (doppelt zählender) reduzibler Zykel. ∞^3. Eine Klasse gegenüber (G_6, H_6), zwei Klassen gegenüber (G'_6, H'_6):
   - *a*. Alle irreduziblen Zykeln sind eigentlich ∞^3. Eine Klasse.
   - *b*. Alle irreduziblen Zykeln sind uneigentlich ∞^3. Eine Klasse.
4. Das Büschel besteht ganz aus reduziblen Zykeln. ∞^1. Eine Klasse.

Jedem Zykelbüschel ist ein zweites *reziprok* zugeordnet:

In reziproken Zykelbüscheln liegt jeder Zykel des einen Büschels orthogonal zu sämtlichen Zykeln des anderen Büschels. Reziproke Zykelbüschel gehören demselben Haupttypus (aber in den Fällen 1. und 3. getrennten Untertypen) an. Jedes Büschel des Typus 4. ist zu sich selbst reziprok.

Bildet man (§ 3) die Zykeln auf die Ebenen des R_3 ab, so erscheinen die Zykelbündel als Punkte, die Zykelbüschel als gerade Linien.

§ 6. *Die Bewegungen und Umlegungen.*

Wir gehen jetzt zur *elementaren* Pfeilgeometrie über. Der Zykel der Punktpfeile wird als *absoluter Zykel* erklärt und es werden nur solche Transformationen von (G_6, H_6) zugelassen, die den absoluten Zykel in sich selbst

überführen. Diese werden dann *Bewegungen* oder *Umlegungen* genannt, jenachdem sie parazyklisch oder antiparazyklisch sind.

Eine Transformation von G_6 (H_6) ist eine Bewegung (Umlegung), wenn zwischen ihren Parametern die Gleichungen bestehen:

$$\beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = \alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 .$$

Die Bewegungen und Umlegungen sind also bereits in der Gruppe (G_6', H_6') enthalten.

Die Bewegungen und Umlegungen verwandeln entgegengesetzte Pfeile stets wieder in ebensolche. Sie umfassen *alle* Transformationen von (G_6, H_6), die diese Eigenschaft besitzen.

Nennen wir *antiparallel* zwei Pfeile, wenn der Endpunkt des einen mit dem Anfangspunkt des andern zusammenfällt, so gilt der Satz:

Antiparallelismus von Pfeilen bleibt bei jeder Bewegung und Umlegung erhalten.

Die Bewegungen und Umlegungen umfassen sämtliche Transformationen von (G_6, H_6), die antiparallele Pfeile stets wieder in ebensolche verwandeln.

Man kann die Bewegungen und Umlegungen durch die Quaternionengleichungen darstellen:

$$\dot{\xi}' = \dot{\alpha} \cdot \dot{\xi} \cdot \dot{\alpha}, \qquad \dot{\xi}' = \dot{\alpha} \cdot \dot{\xi} \cdot \dot{\alpha}. \tag{26}$$

Die Gleichungen (10) vereinfachen sich wesentlich:

$$\begin{gathered}
c_{01} = c_{02} = c_{03} = 0, \qquad c_{10} = c_{20} = c_{30} = 0, \\
c_{00} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \\
c_{11} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \\
c_{22} = \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \\
c_{33} = \alpha_0^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \\
c_{23} = 2(\alpha_0\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3), \qquad c_{32} = 2(-\alpha_0\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3), \\
c_{31} = 2(-\alpha_0\alpha_2 - \alpha_3\alpha_1), \qquad c_{13} = 2(-\alpha_0\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1), \\
c_{12} = 2(\alpha_0\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2), \qquad c_{21} = 2(\alpha_0\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2).
\end{gathered} \tag{27}$$

Übt man nach der Bewegung (Umlegung) $\dot{\alpha}$ die Bewegung oder Umlegung $\dot{\alpha}'$ aus, so gilt jetzt für die resultierende Transformation $\dot{\alpha}''$ *in allen Fällen* die Gleichung:

$$\dot{\alpha}'' = \dot{\alpha} \cdot \dot{\alpha}',$$

oder ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}
\alpha_0'' &= \alpha_0\alpha_0' - \alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\alpha_2' + \alpha_3\alpha_3', \\
\alpha_1'' &= \alpha_1\alpha_0' + \alpha_0\alpha_1' + \alpha_3\alpha_2' - \alpha_2\alpha_3', \\
\alpha_2'' &= \alpha_2\alpha_0' + \alpha_3\alpha_1' + \alpha_0\alpha_2' - \alpha_1\alpha_3', \\
\alpha_3'' &= \alpha_3\alpha_0' - \alpha_2\alpha_1' + \alpha_1\alpha_2' + \alpha_0\alpha_3'.
\end{aligned} \tag{28}$$

Ferner ist:

$$N(\alpha'') = N(\alpha) \cdot N(\alpha').$$

Aus dieser Gleichung schliessen wir:

Die Gesamtheit der Bewegungen zerfällt in zwei getrennte Schaaren:

1) $N(\alpha) > 0$. *Eigentliche* Bewegungen.

2) $N(\alpha) < 0$. *Uneigentliche* Bewegungen.

Die *uneigentlichen* Bewegungen kehren den Umlaufssinn auf dem absoluten Kegelschnitt, d. i. dem als Punktmannigfaltigkeit aufgefassten absoluten Zykel, um.

Die *Gruppe* der *eigentlichen* Bewegungen ist kontinuierlich. Der Umlaufssinn bleibt ungeändert.

Entsprechend haben wir bei den Umlegungen zu unterscheiden. *Eigentliche* Umlegungen lassen den Umlaufssinn ungestört $[N(\alpha) > 0]$.

Es bezeichne S (T) eine eigentliche, S' (T') eine uneigentliche Bewegung (Umlegung).

Drückt man dann durch die symbolische Gleichung

$$(SS) = S$$

den Tatbestand aus, dass zwei eigentliche Bewegungen wieder eine eigentliche Bewegung ergeben, so gelten auch folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} (SS) = S, \quad (SS') = S', \quad (ST) = T, \quad (ST') = T'; \\ (S'S') = S, \quad (S'T) = T', \quad (S'T') = T; \\ (TT) = S, \quad (TT') = S'; \\ (T'T') = S. \end{aligned}$$

Es gibt also folgende dreigliedrige reell-gemischte Gruppen:

$$\boxed{S, S', T, T'}, \quad \boxed{S, T}, \quad \boxed{S, T'}, \quad \boxed{S, S'}.$$

Bei einer Bewegung (Umlegung) werden die Anfangspunkte der Pfeile ebenso transformiert, wie die Endpunkte. Die Bewegungen und Umlegungen sind also auch Transformationen der Punkte des absoluten Kegelschnitts, d. i. des als Punktmannigfaltigkeit aufgefassten absoluten Zykels.

Betrachtet man bei dieser Auffassung jeden ursprünglichen unendlich fernen Punkt als Anfangspunkt, jeden transformierten als Endpunkt eines Pfeils, so entsteht eine Mannigfaltigkeit von ∞^1 Pfeilen, die ein *irreduzibler Zykel* sein muss, da sie offenbar mit jedem α-Büschel und mit jedem ω-Büschel gerade einen Pfeil gemeinsam hat.

Der Bewegung α ist dabei derselbe Zykel zugeordnet, wie der Umlegung α; er hat die Koordinaten $\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$, also die Gleichung $\alpha_0 \underline{x}_0 + \alpha_1 \underline{x}_1 + \alpha_2 \underline{x}_2 + \alpha_3 \underline{x}_3 = 0$.

Die identische Bewegung, ebenso demnach die absolute Spiegelung, führt auf den absoluten Zykel $1:0:0:0$.

Die Theorie der Zykeln steht also in engem Zusammenhang mit der Lehre von den Bewegungen.

Wir betrachten jetzt die *involutorischen* Bewegungen und Umlegungen. Für sie muss, wenn wir von der identischen Bewegung und der absoluten Spiegelung absehen, der Parameter α_0 verschwinden.

1. *Die eigentlichen involutorischen Bewegungen.* $N(\alpha) > 0$. Kein Pfeil bleibt in Ruhe, dagegen werden ∞^1 Pfeile umgekehrt. Die Träger aller dieser Pfeile laufen durch den (zugänglichen) Punkt $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$.

Umwendung um den Punkt $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$.*

Der zugehörige Zykel besteht aus den erwähnten ∞^1 Pfeilen und soll *Punktzykel* genannt werden. Er besitzt keine Punktpfeile und gestattet die absolute Spiegelung. Er gehört zu den *eigentlichen* Zykeln (§ 3).

2. *Die uneigentlichen involutorischen Bewegungen.* $N(\alpha) < 0$. In Ruhe bleiben zwei entgegengesetzte Pfeile und damit auch die zugehörigen Verbindungs(Punkt-)pfeile. Auch hier werden ∞^1 Pfeile umgekehrt. Ihre Träger schneiden jetzt den Träger $\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3$ des ersten Pfeilpaares senkrecht.

Umwendung um die Gerade $\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3$.

Der zugehörige aus jenen ∞^1 Pfeilen und zwei Punktpfeilen bestehende Zykel soll *Geradenzykel* genannt werden. Er gestattet die absolute Spiegelung.

3. *Die eigentlichen involutorischen Umlegungen.* $N(\alpha) > 0$. Der (*eigentliche*) Punktzykel mit den Koordinaten $0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ bleibt *pfeilweise* in Ruhe.

Spiegelung am Punkt $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$.

4. *Die uneigentlichen involutorischen Umlegungen.* $N(\alpha) < 0$. Der (*uneigentliche*) Geradenzykel mit den Koordinaten $0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ bleibt *pfeilweise* in Ruhe.

Spiegelung an der Geraden $\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3$.

Die Spiegelungen an Punkten und Geraden fallen unter den allgemeineren Begriff: Spiegelung am Zykel. Damit ist also die Frage nach der Konstruktion dieser Transformationen bereits beantwortet. Entsprechendes gilt auch für die Konstruktion der Umwendungen.

§ 7. *Klassifikation der Bewegungen und der Zykeln.*

Jede von der identischen verschiedene Bewegung lässt sich auf ∞^1 *Arten darstellen als Aufeinanderfolge zweier Spiegelungen.*

* Statt *Umwendung um einen Punkt* pflegt man auch zu sagen: *Spiegelung am Punkt.* Wir sind hier aber gezwungen, eine Trennung in der Bezeichnung vorzunehmen, und verwenden das Wort Umwendung nur für Bewegungen, das Wort Spiegelung nur für Umlegungen.

Es sei

$$S_\alpha = T_\beta \cdot T_\gamma$$

Dann darf, wie man auf Grund der Gll. (28) leicht bestätigt, gesetzt werden:

$$\beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = 0 : \sigma_2\alpha_3 - \sigma_3\alpha_2 : -(\sigma_3\alpha_1 - \sigma_1\alpha_3) : -(\sigma_1\alpha_2 - \sigma_2\alpha_1),$$

$$\gamma_0 : \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 = 0 : \tau_2\alpha_3 - \tau_3\alpha_2 : -(\tau_3\alpha_1 - \tau_1\alpha_3) : -(\tau_1\alpha_2 - \tau_2\alpha_1).$$

Dabei sind die σ und τ durch folgende Relationen verbunden:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \quad \alpha_0\sigma_1 - \alpha_3\sigma_2 + \alpha_2\sigma_3, \\ \tau_2 &= -\alpha_3\sigma_1 + \alpha_0\sigma_2 + \alpha_1\sigma_3, \\ \tau_3 &= \quad \alpha_2\sigma_1 - \alpha_1\sigma_2 + \alpha_0\sigma_3, \end{aligned}\right\} (\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 \neq \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3).$$

Ferner ist

$$N(\alpha) = N(\beta) \cdot N(\gamma).$$

Eine *eigentliche* Bewegung kann zusammengesetzt werden aus zwei Spiegelungen an Punkten oder auch aus zwei Spiegelungen an Geraden.

Um eine *uneigentliche* Bewegung zu erhalten, hat man die Spiegelung an einem Punkt zusammenzusetzen mit der Spiegelung an einer Geraden.

Wir untersuchen jetzt die verschiedenen Fälle, indem wir mit den eigentlichen Bewegungen beginnen.

1. $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 > 0$. Die beiden Geraden $\beta_1 : -\beta_2 : -\beta_3$ und $\gamma_1 : -\gamma_2 : -\gamma_3$ laufen durch den Punkt $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$. Kein Pfeil bleibt in Ruhe, ebenso kein reduzibler Zykel, wohl aber der Punktzykel $0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$.

Drehung um den Punkt $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$.

Besonderer Fall: $\alpha_0 = 0$. Umwendung um den Punkt $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$.

2. $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0$. Die beiden vorhin erwähnten Geraden sind jetzt parallel. In Ruhe bleibt ein Punktpfeil und ein reduziber Zykel, der die absolute Spiegelung gestattet.

Gleitung längs des Punktpfeils* $0 : \alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3$.

3. $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 < 0$. Jetzt stellt das System $\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3$ eine zugängliche Gerade dar, die Verbindungslinie der Punkte $\beta_1 : \beta_2 : \beta_3$ und $\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3$, oder gemeinsame Normale der Geraden $\beta_1 : -\beta_2 : -\beta_3$ und $\gamma_1 : -\gamma_2 : -\gamma_3$. In Ruhe bleiben die beiden Pfeile auf der Geraden $\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3$, sowie die zugehörigen Verbindungspfeile, ferner vier unschwer zu beschreibende reduzible Zykeln, endlich der Geradenzykel $0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$.

Gleitung längs der Geraden $\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3$.

Ist die Bewegung S_α uneigentlich, so sind die Mittelelemente der Spiegelungen T_β und T_γ Punkt auf der Geraden $\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3$ und Gerade senkrecht

* Von Hrn. E. STUDY benutzt. Das sonst übliche Wort *Schiebung* wird besser vermieden, da es Analogieen suggeriert, die nicht existieren.

zu ihr. Es bleiben dieselben Gebilde in Ruhe, wie bei der eben besprochenen Gleitung.

Uneigentliche Gleitung längs der Geraden $\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3$.

Besonderer Fall: $\alpha_0 = 0$. Unwendung um die Gerade $\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3$.

In allen Fällen ist die Maassinvariante (Winkel, Öffnung*, Abstand) der Mittelelemente der beiden Spiegelungen gleich der halben Grösse der resultierenden Bewegung (Drehwinkel, Gleitöffnung,† Gleitstrecke).

Überall in diesem Abschnitt darf das Wort Spiegelung ersetzt werden durch Umwendung.

Wir geben jetzt im Zusammenhang die Parameter einer Bewegung von vorgeschriebenen üblichen Bestimmungsstücken an.

1. Drehung um den Punkt x durch den Winkel 2ϑ:

$$-\sqrt{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\cot\vartheta : x_1 : x_2 : x_3.$$

2. Gleitung längs der Minimalgeraden $\mathfrak{x}$ durch die Öffnung 2ω:

$$-\frac{1}{\omega}\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_1 : -\mathfrak{x}_2 : -\mathfrak{x}_3.\dagger$$

3. Gleitung längs des (eigentlichen) Pfeils $\mathfrak{x}$ durch die Strecke 2η:

$$\mathfrak{x}_0 \coth\eta : \mathfrak{x}_1 : -\mathfrak{x}_2 : -\mathfrak{x}_3.$$

4. Uneigentliche Gleitung längs des Pfeils $\mathfrak{x}$ durch die Strecke 2η:

$$\mathfrak{x}_0 \operatorname{tgh}\eta : \mathfrak{x}_1 : -\mathfrak{x}_2 : -\mathfrak{x}_3.$$

* Vgl. über diese Begriffe weiter unter die folgenden beiden Fussnoten.

† Hierzu bemerken wir noch Folgendes: Eine *invariante* Grösse, die durch zwei Punkte einer Minimalgeraden (oder, was dasselbe ist, durch zwei parallele Gerade) bestimmt wäre, gibt es natürlich nicht. Erklärt man die Öffnung zweier paralleler Gerader $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ durch die Gleichung

$$-2\omega = [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'] = \frac{\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3' - \mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_2'}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1' - \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_2' - \mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_3'},$$

so ist zu beachten, dass diese Grösse invariant ist nur gegenüber den Bewegungen der im Texte unter (2) aufgeführten eingliedrigen Gruppe, die also nur einen einzigen unendlich fernen Punkt in Ruhe lassen, nämlich den unendlich fernen Schnittpunkt der beiden Parallelen. Sofern die Figur zweier getrennten parallelen Geraden, die in eine bestimmte Reihenfolge gesetzt sind, eine Bewegung der soeben beschriebenen Art völlig bestimmt, darf man von der Öffnung dieser Bewegung reden.

Invariant ist aber die *Öffnungshalbierende* zweier paralleler Geraden, eine dritte zugängliche parallele Gerade, die Symmetrieaxe der Figur der beiden ersten ist.

Will man den Begriff der Öffnung vermeiden, so empfiehlt sich etwa folgende Fragestellung: *Wie heissen die Parameter der Gleitung längs der Minimalgeraden* $L_1 : L_2$, *die die Minimalgerade* $M_1 : M_2$ *überführt in die Minimalgerade* $N_1 : N_2$? Man findet:

$$\frac{2(LM)(LN)}{(MN)} : L_2^2 + L_1^2 : L_2^2 - L_1^2 : 2L_1L_2,$$

wo $L_1 : L_2$ den Berührungspunkt der ersten Minimalgeraden darstellt (vgl. § 1, Gl. 3) und das Symbol (MN) die folgende Bedeutung hat:

$$(MN) = M_1N_2 - M_2N_1, \text{ usw.}$$

Mit der Einteilung der Bewegungen ist gleichzeitig bereits die Klassifikation der irreduziblen Zykeln (gegenüber Bewegungen und Umlegungen) vollzogen. Wir stellen kanonische Vertreter für die einzelnen Typen auf.

I. *Irreduzible Zykeln.* $(AA) \neq 0$.

a. Eigentliche Zykeln. $(AA) > 0$.

1. $A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 > 0$.

α) $A_0 \neq 0$. *Drehzykel.* ∞^3. ∞^1 Klassen.

$$\cos\vartheta \cdot \mathfrak{x}_0 - \sin\vartheta \cdot \mathfrak{x}_1 = 0 \qquad (0 < \vartheta < \tfrac{1}{2}\pi).$$

β) $A_0 = 0$. *Punktzykel.* ∞^2. Eine Klasse.

$$\mathfrak{x}_1 = 0.$$

2. $A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 = 0$.

α) Nicht alle A_i $(i = 1, 2, 3)$ verschwinden gleichzeitig. *Grenzzykel.* ∞^2. Eine Klasse.

$$\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 = 0.$$

β) $A_1 = A_2 = A_3 = 0$. *Absoluter Zykel.* ∞^0.

$$\mathfrak{x}_0 = 0.$$

3. $A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 < 0$. *Gleitzykel.* ∞^3. ∞^1 Klassen.

$$\cosh\eta \cdot \mathfrak{x}_0 - \sinh\eta \cdot \mathfrak{x}_3 = 0 \qquad (0 \neq \eta \neq \infty).$$

b. Uneigentliche Zykeln. $(AA) < 0$.

1. $A_0 \neq 0$. *Uneigentlicher Zykel* allgemeiner Art. ∞^3. ∞^1 Klassen.

$$\sinh\eta \cdot \mathfrak{x}_0 - \cosh\eta \cdot \mathfrak{x}_3 = 0 \qquad (0 \neq \eta \neq \infty).$$

2. $A_0 = 0$. *Geradenzykel.* ∞^2. Eine Klasse.

$$\mathfrak{x}_3 = 0.$$

II. *Reduzible Zykeln.* $(AA) = 0$.

1. $A_0 \neq 0$. Mittelpfeil eigentlich. ∞^2. Eine Klasse.

$$\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_3 = 0, \qquad \lambda_1\mu_2 = 0.$$

2. $A_0 = 0$. Der Mittelpfeil ist Punktpfeil. ∞^1. Eine Klasse.

$$\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 = 0, \qquad \lambda_1\mu_1 = 0.$$

Radius des Drehzykels, Grenzabstand des Grenzykels * und Abstand des

* Über die Invarianz dieses Ausdrucks gelten entsprechende Bemerkungen, wie in der vorigen Fussnote. Gegenüber den hyperbolischen Bewegungen, die nur einen einzigen unendlich fernen Punkt y in Ruhe lassen, hat ein zugänglicher Punkt x die Invariante $\{x, y\}$:

$$e^{\{x,y\}} = \frac{x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}}.$$

Gleitzykels (über die Gestalten dieser Gebilde vgl. § 3) hängen mit den Grössen 2ϕ der zugehörigen Bewegungen (Drehwinkel, Gleitöffnung, Gleitstrecke) zusammen durch die Gleichung

$$|r| = \log \epsilon \frac{e^{\frac{\epsilon\phi}{2}} + e^{-\frac{\epsilon\phi}{2}}}{e^{\frac{\epsilon\phi}{2}} - e^{-\frac{\epsilon\phi}{2}}},$$

wenn man der Reihe nach setzt:

$$\epsilon^2 = -1, \qquad \epsilon^2 = 0, \qquad \epsilon^2 = +1.$$

Im Falle $\epsilon^2 = -1$ gibt die Gleichung den bekannten Zusammenhang zwischen Lotlänge und Parallelenwinkel. —

Bezeichnet man die Zykeln, die die absolute Spiegelung gestatten, also die Punktzykeln, Geradenzykeln und den zweiten Typus der reduziblen Zykeln als *spezielle* Zykeln, so gilt der Satz:

Ein Zykelbüschel enthält einen einzigen speziellen Zykel, oder es besteht ganz aus solchen.

Im ersten Falle hat der spezielle Zykel einfache geometrische Bedeutung (Mittelpunkt des Drehzykels, gemeinsame Normale der beiden Pfeile, in denen sich zwei Zykel durchdringen, Scheitelpunkt des Grenzzykels u. s. w.).

Jeder zum absoluten Zykel orthogonale Zykel ist speziell.

§ 8. *Konstruktionen im Pfeilgebiet.*

Von der elementaren Pfeilgeometrie kehren wir noch einmal zu allgemeineren Betrachtungen zurück. Es ist zunächst zu zeigen, wie man beliebig viele Pfeile eines durch drei Pfeile bestimmten irreduziblen Zykels konstruieren kann. Daran schliessen wir noch einige andere Konstruktionsaufgaben an.

Irgend drei Pfeile, von denen keine zwei parallel sind, bestimmen, wie schon gesagt, eine Abbildung des absoluten Kegelschnitts auf sich selbst von folgender Eigenschaft:

Das Doppelverhältnis von irgend vier ursprünglichen Punkten ist gleich dem Doppelverhältnis der transformierten Punkte.

Deuten wir jeden ursprünglichen Punkt als Anfangspunkt, den transformierten als Endpunkt eines Pfeils, so erfüllen die ∞^1 auf diese Weise erhaltenen Pfeile den ganzen durch die drei gegebenen Pfeile bestimmten Zykel.

Ist also der Zykel pfeilweise bekannt, so ist dadurch die ganze Abbildung gegeben.

Man kann sich nun auf den Standpunkt stellen, dass nur die *speziellen* Zykeln

Es genügt, dieser Grösse, die wir als *Grenzabstand* des Punktes x gegen den Punkt y bezeichnen, positive Werte beizulegen. Der Ort der Punkte x, die gegen einen unendlich fernen Punkt gleichen Grenzabstand besitzen, ist eine *Grenzkurve*. Der Abstand zweier Grenzkurven, die zu ein und demselben unendlich fernen Punkte gehören, ist gleich der Differenz der Grenzabstände.

unmittelbar gegeben seien, und dann die Aufgabe stellen, *unter Benutzung nur von speziellen Zykeln* die Abbildung herzustellen und damit auch nicht-spezielle Zykeln zu konstruieren.

Das kann auf folgende Weise geschehen: (wir setzen voraus, dass der zu konstruierende Zykel nicht schon speziell ist).

1. Die Anfangspunkte (a, b, c) der drei Pfeile verbinden wir mit einem (nicht unendlich fernen, sonst aber) beliebigen Punkt P_1 Es entsteht ein spezieller Zykel, gegeben durch die drei Pfeile $\overrightarrow{aA}$ $\overrightarrow{bB}$, $\overrightarrow{cC}$.

2. Jetzt verbinden wir einen zweiten (nicht unendlich fernen) Punkt P_2 mit den Punkten A, B und C durch Pfeile. Der neue spezielle Zykel ist durch die Pfeile $\overrightarrow{A'A}$, $\overrightarrow{B'B}$, $\overrightarrow{C'C}$ gegeben.

3. Sind die Punkte P_1 und P_2 passend gewählt, so ist es stets möglich, einen dritten Punkt P_3 so zu finden, dass die orientierten Verbindungsgeraden $\overrightarrow{A'P_3}$, $\overrightarrow{B'P_3}$, CP_3 der Reihe nach durch die Endpunkte a', b', c' der drei gegebenen Pfeile laufen.

Wendet man diese Konstruktion auf einen vierten unendlich fernen Punkt d an, so erhält man den zugeordneten Punkt d' und somit einen vierten Pfeil des durch die drei gegebenen laufenden Zykels.

Die drei Punkte P_1, P_2, P_3 kann man z. B folgendermassen wählen: (Fig. 7)

$$P_1 = (ab, cc'), \qquad P_3 = (aa', bb'), \qquad P_2 = (ab, P_3c').$$

Die Punkte P existieren stets. Vorkommen kann es aber, dass der eine oder andre von ihnen unendlich fern liegt. Der Fall kann dann durch Einschieben noch eines vierten speziellen Zykels stets vermieden werden. Auf gleiche Weise beseitigt man unbequeme Lageverhältnisse.

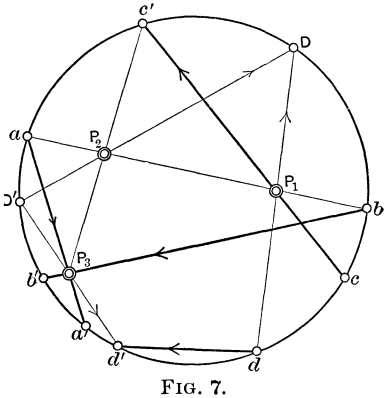


FIG. 7.

Benutzt sind nur die drei *linearen* Fundamentalkonstruktionen der ebenen *projektiven* Geometrie:

1) Zwei Punkte zu verbinden.

2) Zwei Gerade zum Schnitt zu bringen.

3) Den zweiten Schnittpunkt einer Geraden mit einer Kurve zweiter Ordnung zu finden.

Da wir von dem durch die drei Pfeile $\overrightarrow{aa'}$, $\overrightarrow{bb'}$, $\overrightarrow{cc'}$ gehenden Zykel auf Grund dieser linearen Konstruktionen jetzt beliebig viele Pfeile zeichnen können, erklären wir als

1. *Erste (lineare) Fundamentalkonstruktion der Pfeilgeometrie:*
Durch drei Pfeile, von denen keine zwei parallel sind, den Zykel zu legen.
Durch zweimalige Anwendung dieser Konstruktion löst man die Aufgabe:

2. *Einen Pfeil an einem irreduziblen Zykel zu spiegeln.*

Es ist zwar noch ein Pfeil mit einem andern zu *verbinden* (§ 1, Fig. 1); das ist aber keine neue geometrische Konstruktion, da der Pfeil eben als Punktepaar erklärt worden ist; den Träger hatten wir in den Begriff des Pfeils nicht mit aufgenommen.

3. *Es soll die parazyklische (antiparazyklische) Pfeiltransformation konstruiert werden, die drei Pfeile* $\overrightarrow{aA}$, $\overrightarrow{bB}$, $\overrightarrow{cC}$, *von denen keine zwei parallel sind, in die Pfeile* $\overrightarrow{a'A'}$, $\overrightarrow{b'B'}$, $\overrightarrow{c'C'}$ *überführt.*

Man konstruiert im ersten Falle die beiden Zykeln

$$\overrightarrow{aa'}, \overrightarrow{bb'}, \overrightarrow{cc'} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'};$$

im zweiten Falle dagegen die Zykeln

$$\overrightarrow{aA'}, \overrightarrow{bB'}, \overrightarrow{cC'} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{Aa'}, \overrightarrow{Bb'}, \overrightarrow{Cc'}.$$

Das weitere Verfahren, zu einem vierten ursprünglichen Pfeil $\overrightarrow{dD}$ den transformierten zu finden, bedarf keiner Erläuterung mehr.

4. *Den zweiten Durchdringungspfeil zweier irreduzibler Zykeln zu zeichnen, wenn der erste gegeben ist.*

Ein Pfeil $\mathfrak{x}$ wird beliebig gewählt, aber so dass er keinem der beiden gegebenen Zykeln A und B angehört. Dann spiegeln wir ihn an den beiden Zykeln A und B und erhalten die Spiegelbilder $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$. Kurz geschrieben:

$$\mathfrak{x}\{A\}\mathfrak{y}, \qquad \mathfrak{x}\{B\}\mathfrak{z}.$$

Jetzt wird der Zykel $\mathfrak{xyz}$ gezeichnet. Wird der gegebene Durchdringungspfeil I der beiden Zykeln A und B am Zykel $(\mathfrak{xyz})$ gespiegelt, so erhält man den zweiten gesuchten Durchdringungspfeil II:

$$\text{I}\{\mathfrak{xyz}\}\text{II}.$$

Damit die zuletzt angegebene Spiegelung am Zykel möglich ist, muss natürlich der Zykel $(\mathfrak{xyz})$ irreduzibel sein. So lässt sich aber der Pfeil $\mathfrak{x}$ stets wählen.

5. *Durch einen Pfeil* $\mathfrak{x}$ *den Zykel zu legen, der zu zwei getrennten irreduziblen Zykeln A und B orthogonal ist.*

$$\mathfrak{x}\{A\}\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{x}\{B\}\mathfrak{z}.$$

Dann ist der Zykel $(\mathfrak{xyz})$ der gesuchte. Es gibt ∞^1 Lösungen, falls der reduzible Zykel, für den der Pfeil $\mathfrak{x}$ Mittelpfeil ist, mit A und B in einem Zykelbüschel liegt, in allen übrigen Fällen eine einzige Lösung. Das soeben angegebene Verfahren führt jedoch nicht zum Ziel, wenn der Pfeil $\mathfrak{x}$ einem der beiden gegebenen Zykeln angehört. Dann benutzt man am bequemsten Aufgabe 9.

6. *Den Zykel zu zeichnen, der zu zwei getrennten reduziblen Zykeln A und B orthogonal liegt und durch den Pfeil* $\mathfrak{x}$ *läuft.*

Man legt durch $\mathfrak{x}$ und die Mittelpfeile der beiden reduziblen Zykeln den Zykel. Es darf $\mathfrak{x}$ nicht bereits Mittelpfeil eines der beiden reduziblen Zykeln sein; dann gibt es ∞^1 Lösungen; ebenso wenn die Mittelpfeile der beiden gegebenen reduziblen Zykeln beide zum Pfeil $\mathfrak{x}$ α-parallel (ω-parallel) sind.

7. *Den Zykel zu zeichnen, der durch den Pfeil* $\mathfrak{x}$ *läuft, zu einem irreduziblen und zu einem reduziblen Zykel orthogonal ist.*

Man spiegelt den Pfeil $\mathfrak{x}$, sowie den Mittelpfeil des reduziblen Zykels am irreduziblen. Dadurch hat man vier Pfeile des gesuchten Zykels. Auch hier kann das Lösungsverfahren versagen (wenn $\mathfrak{x}$ dem irreduziblen Zykel angehört), ferner gibt es in zwei unschwer zu beschreibenden Fällen ∞^1 Lösungen.

8. *Den Zykel zu zeichnen, der durch einen Pfeil* $\mathfrak{x}$ *läuft und dem durch die beiden Zykeln A und B bestimmten Büschel angehört.*

Man benutzt (je nach der Beschaffenheit der beiden Zykeln A und B) eine der drei letzten Aufgaben und zeichnet zwei beliebige Zykeln orthogonal zu A und B. Sie mögen C und D heissen. Sie dürfen nicht reduzibel sein und dürfen nicht durch den gegebenen Pfeil laufen. Weiter:

$$\mathfrak{x}\{C\}\mathfrak{y}, \qquad \mathfrak{x}\{D\}\mathfrak{z}.$$

Dann ist der Zykel $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ der gesuchte.

9. *Den Orthogonalzykel dreier Zykeln A, B, C, die nicht einem Büschel angehören, zu finden.*

Man wählt einen Pfeil $\mathfrak{x}$, der keinem der drei Zykeln angehört, beliebig. Durch $\mathfrak{x}$ legt man die drei Zykeln, die der Reihe nach den Büscheln (B, C), (C, A), (A, B) angehören (vorige Aufgabe). Diese drei Zykeln durchdringen sich ausser in $\mathfrak{x}$ noch in einem Pfeil $\mathfrak{x}'$.

Diese Konstruktion wiederholt man mit einem zweiten Pfeil $\mathfrak{y}$ und erhält den Pfeil $\mathfrak{y}'$.

Die vier Verbindungspfeile $\overrightarrow{\mathfrak{x}\text{–}\mathfrak{x}'}$, $\overrightarrow{\mathfrak{x}'\text{–}\mathfrak{x}}$, $\overrightarrow{\mathfrak{y}\text{–}\mathfrak{y}'}$, $\overrightarrow{\mathfrak{y}'\text{–}\mathfrak{y}}$ gehören dem gesuchten Orthogonalzykel an. Durch die soeben angegebene Konstruktion lassen sich auch die oben (bei 5 und 7) erwähnten Fälle erledigen, wenn die dort aufgeführten Methoden versagen.

Als quadratische Konstruktion ist die folgende zu betrachten.

10. *Die beiden Durchdringungspfeile zweier Zykeln zu zeichnen.*

Die beiden Zykeln seien A und B. Man zeichnet zwei weitere Zykeln C und D beliebig, die zu beiden orthogonal sind. Dann bestimmen die drei Zykeln C, D und A einen Orthogonalzykel O. Dieser liegt mit A und B in einem Büschel. Die Durchdringungspfeile von A und B sind daher identisch mit denen von A und O. Die Aufgabe ist also etwas vereinfacht und es gilt als

11. *Zweite (quadratische) Fundamentalkonstruktion der Pfeilgeometrie: Die Durchdringungspfeile zweier orthogonaler Zykeln zu zeichnen.*

Sie ist in dem erklärten Gebiet, in dem es nur reelle Pfeile gibt, natürlich nicht immer lösbar.

§ 9. *Die Hauptarten Nicht-Euklidischer Geometrie der Ebene.*

Um der Pfeilgeometrie eine Stelle im Ganzen der Geometrie zuzuweisen, müssen wir etwas weiter ausholen und z. T. bekannte Dinge ausführen. Dabei werden sich dann gleichzeitig manche der eingeführten Benennungen motivieren.

Die Gesamtheit der eigentlichen reellen Punkte der Ebene kann bekanntlich auf zwei verschiedene Arten zu einem abgeschlossenen Kontinuum ergänzt werden.

A. Zunächst zum *projektiven* Kontinuum. Ein Punkt wird durch *drei* homogene *reelle* Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3$ dargestellt. Die zugehörige *achtgliedrige* Transformationsgruppe ist *kontinuierlich:*

$$x_i' = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{i3}x_3, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

B. Das zweite Kontinuum wird dadurch erhalten, dass man das erste doppelt überdeckt:

Zyklisches Kontinuum.* Es hat den Zusammenhang einer singularitätenfreien Fläche zweiter Ordnung, die reelle Punkte, aber keine reellen Erzeugenden besitzt.

Der Punkt des zyklischen Kontinuums kann daher durch *eine komplexe* Zahl $\xi = \xi_1 : \xi_2$ dargestellt werden. Die zugehörige Gruppe ist *sechsgliedrig* (*zyklische* Gruppe = Gruppe der MÖBIUSschen Kreisverwandtschaften). Sie ist *gemischt* und besteht aus zwei getrennten Transformationsscharen:

$\xi_1' = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2,$	$\xi_1' = b_{11}\bar{\xi}_1 + b_{12}\bar{\xi}_2,$
$\xi_2' = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2.$	$\xi_2' = b_{21}\bar{\xi}_1 + b_{22}\bar{\xi}_2.$
Zyklische Transformationen.	*Antizyklische* Transformationen.†

Die zyklische Gruppe ist enthalten in der unendlichen konformen Gruppe:

$\xi' = f(\xi).$	$\xi' = f(\bar{\xi}).$
Konforme Transformationen.	*Antikonforme* Transformationen.

A. Man betrachtet nun gewisse Untergruppen der *projektiven* Gruppe, indem man ein absolutes Gebilde (einen irreduziblen *Kegelschnitt*) einführt, und nach den Transformationen fragt, die es in Ruhe lassen. Diese bilden eine *kontinuierliche*‡ dreigliedrige Untergruppe und sollen *Bewegungen* genannt werden.

* Es ist das Kontinuum, mit dem man es in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen zu tun hat. Man könnte es vielleicht besser als *sphärisch* bezeichnen. Ebenso berechtigt wäre dann aber, wie wir noch sehen werden, der Name *pseudosphärisches* Kontinuum. In unserm Zusammenhang ist die im Text eingeführte Bezeichnung vorzuziehen.

† Durch $\bar{\xi}$ soll, wie üblich, der zu ξ konjugiert-komplexe Wert bezeichnet werden.

‡ Es ist zweckmässig, als *gemischt* nur solche Gruppen zu bezeichnen, deren Erweiterung ins komplexe Gebiet noch gemischt ist.

Der absolute Kegelschnitt besitzt keine reellen Punkte:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Elliptische Bewegungen:

$$\dot{x}' = \dot{\alpha} \cdot \dot{x} \cdot \dot{\alpha}.$$

Der absolute Kegelschnitt besitzt reelle Punkte:

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Hyperbolische Bewegungen:

$$\dot{x}' = \dot{\alpha} \cdot \dot{x} \cdot \dot{\alpha}.$$

Dabei bedeutet:

$$\dot{\alpha} = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

$$\underline{\dot{\alpha}} = \alpha_0 e_0 - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3,$$

$$\dot{x} = * \; x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

Das benutzte System komplexer Zahlen ist

e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

Erste Gestalt der Quaternionen (Hamiltonsche Quaternionen).

e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	e_0	$-e_1$
e_3	e_2	e_1	e_0

Zweite Gestalt der Quaternionen (vgl. § 2).

Die Transformationsdeterminante hat den Wert:

$$(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^3;$$

Sie ist stets positiv.

Die Gruppe der reellen elliptischen Bewegungen bildet ein einziges Kontinuum.

$$(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)^3;$$

Sie kann das Vorzeichen wechseln.

Die Gruppe der reellen hyperbolischen Bewegungen umfasst zwei getrennte Kontinua:

1) $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 > 0$. *Eigentliche* Bewegungen.

2) $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 < 0$. *Uneigentliche* Bewegungen.*

B. Entsprechende Überlegungen stellt man für das *zyklische* Kontinuum an. Ein irreduzibler *Kreis* wird als absolutes Gebilde erklärt.† Er bleibt in Ruhe bei einer dreigliedrigen *gemischten* Gruppe. Diese heisst Gruppe der *Bewegungen* und *Umlegungen*. Die Bewegungen sind die *zyklischen*, die Umlegungen die *antizyklischen* Transformationen der fraglichen Eigenschaft.

* Manche Autoren nennen *Bewegungen* nur die, die wir als eigentliche Bewegungen bezeichnen. Unsere uneigentlichen Bewegungen werden öfter mit den Umlegungen der sphärischen Geometrie in Parallele gesetzt, was aber nicht zutreffend ist.

† Besser gesagt: Als absolutes Polarsystem wird das mit einer gewissen (nicht semidefiniten) binären Hermiteschen Form verbundene erklärt.

2. *Pseudosphärische Geometrie:*

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = i(\xi_1\bar{\xi}_2 - \xi_2\bar{\xi}_1) : \xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2 : \xi_1\bar{\xi}_1 - \xi_2\bar{\xi}_2 : \xi_1\bar{\xi}_2 + \xi_2\bar{\xi}_1.$$

$$x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Es folgen jetzt unmittelbar folgende Sätze:

Die Gruppe der *sphärischen* Bewegungen ist *holomorph* zur Gruppe der *elliptischen* Bewegungen.

Die Gruppe der *sphärischen* Bewegungen und Umlegungen ist *meromorph* zur Gruppe der *elliptischen* Bewegungen.

Die Gruppe der *pseudosphärischen* Bewegungen ist *holomorph* zur Gruppe der *hyperbolischen* Bewegungen.

Die Gruppe der *pseudosphärischen* Bewegungen und Umlegungen ist *meromorph* zur Gruppe der *hyperbolischen* Bewegungen.

Der Meromorphismus kommt dadurch zustande, dass der Identität zugeordnet wird die ausgezeichnete Transformation

$$\dot{x}' = \underline{\dot{x}},$$

die beide Blätter der Ebene vertauscht.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen sphärischer und pseudosphärischer Geometrie besteht in Folgendem:

Die vierte Koordinate x_0, durch deren Einführung aus dem Punkte $x_1 : x_2 : x_3$ des projektiven Kontinuums die beiden *übereinander liegenden* Punkte

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 \qquad \text{und} \qquad x_0 : -x_1 : -x_2 : -x_3$$

des zyklischen Kontinuums hervorgehen, ist im *sphärischen* Falle *stets* reell; in der pseudosphärischen Geometrie indessen nur, solange $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ nicht negativ ist.

In der pseudosphärischen Geometrie sind als reell (ausser den Punkten des absoluten Kreises) nur zu bezeichnen die Punkte des doppelt überdeckten "zugänglichen" Gebietes.

Während also die *sphärische Ebene* das ganze zyklische Kontinuum erfüllt, besteht die *pseudosphärische Ebene, die denselben Zusammenhang besitzt*, nur aus den Punkten einer doppelt zählenden kreisförmigen Scheibe, deren Ränder zusammenhängen.

§ 10. *Parasphärische Geometrie.*

Wir stellen jetzt die Frage, was für eine Geometrie entstehen würde, wenn man das *unzugängliche* Gebiet der hyperbolischen Ebene doppelt überdeckt, wobei wieder der absolute Kegelschnitt Verzweigungsmannigfaltigkeit sein soll.

Wir definieren eine vierte Koordinate x_0 jetzt durch die Gleichung

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Der absolute Kreis besitzt keine reellen Punkte:

$$\xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2 = 0.$$

Sphärische Bewegungen:

$$\xi_1' = (\alpha_0 + i\alpha_3)\xi_1 + (\alpha_2 + i\alpha_1)\xi_2,$$
$$\xi_2' = (-\alpha_2 + i\alpha_1)\xi_1 + (\alpha_0 - i\alpha_3)\xi_2.$$

Sphärische Umlegungen:

$$\xi_1' = (-\alpha_2 - i\alpha_1)\bar{\xi}_1 + (\alpha_0 + i\alpha_3)\bar{\xi}_2,$$
$$\xi_2' = (-\alpha_0 + i\alpha_3)\bar{\xi}_1 + (-\alpha_2 + i\alpha_1)\bar{\xi}_2.$$

Der absolute Kreis besitzt reelle Punkte:

$$i(\xi_1\bar{\xi}_2 - \xi_2\bar{\xi}_1) = 0.$$

Pseudosphärische Bewegungen:

$$\xi_1' = (\alpha_0 - \alpha_3)\xi_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\xi_2,$$
$$\xi_2' = (\alpha_2 - \alpha_1)\xi_1 + (\alpha_0 + \alpha_3)\xi_2.$$

Pseudosphärische Umlegungen:

$$\xi_1' = (\alpha_0 - \alpha_3)\bar{\xi}_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\bar{\xi}_2,$$
$$\xi_2' = (\alpha_2 - \alpha_1)\bar{\xi}_1 + (\alpha_0 + \alpha_3)\bar{\xi}_2.$$

Die $\alpha_i (i = 0, 1, 2, 3)$ sind *reell* zu nehmen.

C. Man stellt sich jetzt die Aufgabe, den Punkt ξ des zyklischen Kontinuums durch *vier reelle* homogene Koordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ so darzustellen, dass der absolute Kreis der sphärischen (pseudosphärischen) Geometrie übergeht in den absoluten Kegelschnitt der elliptischen (hyperbolischen) Geometrie, dass ferner übereinander liegende Punkte beider Blätter der Ebene dargestellt werden durch die Systeme:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 \qquad \text{und} \qquad x_0 : -x_1 : -x_2 : -x_3.$$

Zwischen den x besteht dann eine quadratische Relation; das absolute Gebilde erscheint als Verzweigungsmannigfaltigkeit.* Setzt man jetzt:

$$\dot{x} = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_2,$$

so ergeben sich die einfachen Formeln:

Bewegungen:	Umlegungen:
$x' = \underline{\alpha} \cdot \dot{x} \cdot \alpha,$	$\dot{x}' = \underline{\alpha} \cdot \underline{\dot{x}} \cdot \dot{\alpha}.$

Bei Benutzung der ersten (zweiten) Gestalt der Quaternionen erhält man die sphärischen (pseudosphärischen) Bewegungen und Umlegungen.

Die x hängen mit den ξ und unter sich durch folgende Gleichungen zusammen:

1. *Sphärische Geometrie:*

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2 : \xi_1\bar{\xi}_2 + \xi_2\bar{\xi}_1 : i(\xi_1\bar{\xi}_2 - \xi_2\bar{\xi}_1) : \xi_1\bar{\xi}_1 - \xi_2\bar{\xi}_2.$$

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

* Diesen Sachverhalt verkennt Hr. F. KÖLMEL: *Bewegungen und Umlegungen der Ebene bei projektiver Maassbestimmung*, Lahr bei Schauenburg, 1900, pag. 18. Wir weisen darauf hin, da Hr. KÖLMEL seine Behauptung, der absolute Kegelschnitt sei ebenfalls doppelt überdeckt, halten zu können glaubt. Auch in einer Strassburger Dissertation [A. MAGENER, *Anallagmatische Punktkoordinaten im Kugelgebüsch und ihre Anwendung auf die Nicht-Euklidische Geometrie*, 1906] werden tatsächlich bestehende Unterschiede verwischt. Der Verfasser hält es für unzulässig, die Punkte der von ihm zusammengefassten Punktepaare einzeln zu betrachten (!)

Ein Punkt $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ dieses Kontinuums (der *parasphärischen Ebene*, wie wir sagen wollen) kann dann durch *zwei reelle* Parameter (λ, μ) in folgender Weise dargestellt werden.

$$-x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 : \lambda_2\mu_2 + \lambda_1\mu_1 : \lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_1 : \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1.$$

Die "parasphärischen Bewegungen und Umlegungen" werden, wenn man sich der Koordinaten x bedient, durch genau dieselben Gleichungen geliefert, wie die pseudosphärischen:

$$\dot{x}' = \dot{\alpha}\cdot\dot{x}\cdot\dot{\alpha}, \qquad \dot{x}' = \dot{\alpha}\cdot\dot{\underline{x}}\cdot\dot{\alpha}.$$

In den Parametern (λ, μ) lauten sie:

$$\lambda_1' = (\alpha_0 + \alpha_3)\lambda_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\lambda_2, \qquad \mu_1' = (\alpha_0 + \alpha_3)\mu_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\mu_2,$$
$$\lambda_2' = (\alpha_2 + \alpha_1)\lambda_1 + (\alpha_0 - \alpha_3)\lambda_2, \qquad \mu_2' = (\alpha_2 + \alpha_1)\mu_1 + (\alpha_0 - \alpha_3)\mu_2.$$

(Bewegungen)

$$\lambda_1' = (\alpha_0 + \alpha_3)\mu_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\mu_2, \qquad \mu_1' = (\alpha_0 + \alpha_3)\lambda_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\lambda_2,$$
$$\lambda_2' = (\alpha_2 + \alpha_1)\mu_1 + (\alpha_0 - \alpha_3)\mu_2, \qquad \mu_2' = (\alpha_2 + \alpha_1)\lambda_1 + (\alpha_0 - \alpha_3)\lambda_2.$$

(Umlegungen)

Die Übereinstimmung ist aber nicht nur formal; die parasphärischen Bewegungen und Umlegungen unterscheiden sich von den pseudosphärischen vielmehr nur durch die Objekte, nämlich durch die verschiedenen Ungleichungen, denen die zu transformierenden Veränderlichen zu genügen haben, während die Transformationsformeln dieselben sind.

Diese Übereinstimmung erstreckt sich aber nicht mehr auf umfassendere Gruppen. Die parasphärischen Bewegungen und Umlegungen lassen sich nämlich zu einer sechsgliedrigen Gruppe erweitern, (*parazyklische Gruppe*) die von der MOEBIUSschen, von uns *zyklisch* genannten Gruppe ganz verschieden ist.

Die *zyklische* Gruppe ist nämlich holomorph zu folgender Gruppe:

$\dot{x}' = \dot{\alpha}\cdot\dot{x}\cdot\dot{\beta}$,	$\dot{x}' = \dot{\alpha}\cdot\dot{\underline{x}}\cdot\dot{\beta}$.
Zyklische Transformationen.	*Antizyklische* Transformationen.

Dabei hat man $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ zu setzen und sich der *ersten* Gestalt der Quaternionen zu bedienen.*

Wählen wir nun wieder die zweite Gestalt der Quaternionen, setzen jetzt aber

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

* Deutet man die x in den letzten Gleichungen als homogene Punktkoordinaten im R_3, so stellen diese Gleichungen die Gruppe der elliptischen Bewegungen und Umlegungen dar. Doch ist der Zusammenhang dieser Gruppe mit den sphärischen (pseudosphärischen) Bewegungen und Umlegungen viel komplizierter als bei den entsprechenden Verhältnissen der parazyklischen Gruppe, wie wir hier nicht näher ausführen können.

so liefern die Gleichungen die *parazyklische* Gruppe, die in den (λ, μ) durch die Gleichungen (9) und (20) ausgedrückt wird. Die beiden Transformationsscharen der Gruppe werden konsequent folgendermassen benannt:

$$\dot{x}' = \dot{\alpha} \cdot \dot{x} \cdot \dot{\beta},$$

Parazyklische Punkttransformationen.

$$\dot{x}' = \dot{\alpha} \cdot \dot{\underline{x}} \cdot \dot{\beta}.$$

Antiparazyklische Punkttransformationen.

Dem Aufbau der zur parazyklischen Gruppe gehörigen Geometrie stehen Schwierigkeiten nicht entgegen. Man wird es aber als Mangel empfinden, dass sie sich im unzugänglichen Gebiet abspielt. Diesen Mangel beseitigt die absolute Korrelation, indem sie aus der Gesamtheit der doppelt überdeckten *unzugänglichen Punkte* hervorgehen lässt die Gesamtheit der doppelt überdeckten *zugänglichen Geraden.* Die doppelte Überdeckung des Geradengebietes vollzieht sich nun vermöge des *Orientierungs*prozesses; die Gerade wird durch zwei eigentliche Pfeile (§ 1) ersetzt. Die Pfeilkoordinaten (§ 1) ergeben sich einfach:

$$\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = -x_0 : -x_1 : x_2 : x_3.$$

Die Pfeilgeometrie erweist sich somit als Bild einer Punktgeometrie, die an und für sich wenig Interesse zu bieten schien, andererseits aber, obwohl sie nicht die reelle Euklidische Geometrie zur Grenzlage hat, doch eine Lücke der vorhandenen Systeme Nicht-Euklidischer Geometrie ausfüllt.—

Unsere Pfeilgeometrie ist ferner eine von drei zusammengehörigen Disziplinen, die als *elliptische, hyperbolische* und *Euklidische Pfeilgeometrie* unterschieden werden können. Die hier allein behandelte würde als *hyperbolische* zu bezeichnen sein. Zur elliptischen Pfeilgeometrie gelangt man durch folgende Überlegungen:

Man kann auf der Kugel eine gegenseitig-eindeutige Zuordnung vornehmen zwischen den Punkten und den orientierten Hauptkreisen. Irgend ein Punkt liegt zu dem ihm entsprechenden orientierten Hauptkreis so, wie der Nordpol der Erdkugel zu dem von West nach Ost durchlaufenen Aequator. Gehen wir nun durch Zentralprojektion zur projektiv abgeschlossenen und dann doppelt überdeckten Ebene über, so werden die orientierten Hauptkreise zu orientierten Geraden, *Pfeilen.* Ein Pfeil kann dann also durch *einen komplexen* Parameter dargestellt werden. Dieses *elliptische* Pfeilkontinuum besitzt aber ganz anderen Zusammenhang wie das hyperbolische. Es gibt keine Verzweigungsmannigfaltigkeit. Ein Analogon zu den Punktpfeilen gibt es (im reellen Gebiet) nicht.

Die Gruppe der zyklischen Punkttransformationen geht über in eine Gruppe von zyklischen *Pfeil*transformationen. Die Formeln sind eben nur anders zu deuten.

Als Bewegungen und Umlegungen sind zu erklären diejenigen zyklischen bezw. antizyklischen Pfeiltransformationen, die entgegengesetzte Pfeile wieder in ebensolche überführen.

An die Stelle der bilinearen Formen in Pfeilparametern, deren Nullstellen in der hyperbolischen Pfeilgeometrie die Zykeln lieferten, treten binäre Hermitesche Formen. Den definiten Formen entsprechen *nullteilige* Zykeln, d. i. solche, die keine reellen Pfeile besitzen. Von den reduziblen Zykeln ist nur der Mittelpfeil übrig geblieben.

Verloren geht die Umkehrbarkeit der Beziehung zwischen Bewegungen und irreduziblen Zykeln. Ebenso verschwindet der Begriff: Parallelismus von Pfeilen und die daraus folgenden Tatsachen, z. B. auch die einfache Konstruktion der Spiegelung am Zykel.

Man darf daher wohl die *hyperbolische* Pfeilgeometrie als die interessantere erklären.

Beide Pfeilgeometrieen lassen sich nun ins komplexe Gebiet fortsetzen. Diese ihre Erweiterungen lassen sich dann geradezu identifizieren, wie wir noch kurz andeuten wollen.

Hyperbolische Geometrie:

Absoluter Kegelschnitt reell *mit reellen Punkten.*

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 : \lambda_2^2 - \lambda_1^2 : 2\lambda_1\lambda_2,$$

Elliptische Geometrie:

Absoluter Kegelschnitt reell *ohne reelle Punkte.*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2 : i(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) : 2\lambda_1\lambda_2,$$

wobei der Parameter $\lambda_1 : \lambda_2$ jetzt alle möglichen *komplexen* Werte durchläuft. Gehört der Punkt y des absoluten Kegelschnitts zum Parameterwert $\mu_1 : \mu_2$, so kann der *komplexe* Pfeil mit dem Anfangspunkt x und dem Endpunkt y dargestellt werden durch die Koordinaten:

H. G. $$\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 : -(\lambda_2\mu_2 + \lambda_1\mu_1) : \lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_1 : \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1,$$
$$\mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{x}_1^2 - \mathfrak{x}_2^2 - \mathfrak{x}_3^2 = 0.$$

E. G. $$\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 : \lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2 : i(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2) : \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1,$$
$$\mathfrak{x}_0^2 - \mathfrak{x}_1^2 - \mathfrak{x}_2^2 - \mathfrak{x}_3^2 = 0.$$

Die beiden Kontinua komplexer Pfeile lassen sich nun durchaus eindeutig-umkehrbar aufeinander abbilden, am bequemsten dadurch, dass man solche Pfeile einander zuordnet, die zu gleichen Parameterpaaren $\lambda_1 : \lambda_2$, $\mu_1 : \mu_2$ gehören. Wir erklären nun: Ein Pfeil heisst *reell*, wenn seine *Koordinaten* reell sind, d. i.

wenn seine Parameter *einzeln reell* sind:

$$\lambda_1\bar{\lambda}_2 - \lambda_2\bar{\lambda}_1 = 0, \quad \mu_1\bar{\mu}_2 - \mu_2\bar{\mu}_1 = 0.$$

Kontinuum der reellen *hyperbolischen* Pfeilgeometrie.

wenn seine Parameter *entgegengesetzt, reziprok* und *konjugiert-komplex* sind:

$$\lambda_1\bar{\mu}_1 + \lambda_2\bar{\mu}_2 = 0.$$

Kontinuum der reellen *elliptischen* Pfeilgeometrie.

Man erhält nun noch ein drittes ebenes Pfeilkontinuum, indem man nur die *eigentlichen* Geraden der Ebene doppelt überdeckt und den so gewonnenen *eigentlichen* Pfeilen die *uneigentliche* (unendlich ferne) *Gerade* als *uneigentlichen Pfeil* hinzufügt. Die zugehörige Geometrie mit *siebengliedriger* Gruppe umfasst die elementare Euklidische. Das neue Pfeilkontinuum darf daher als *Euklidisches* bezeichnet werden. Es hat den Zusammenhang eines einteiligen irreduziblen *Kegels* zweiter Ordnung. Auf weitere Mannigfaltigkeiten, die als zur Euklidischen Geometrie gehörige Pfeilkontinua erklärt werden können, wollen wir hier nicht eingehen. Das hier erwähnte findet man behandelt in der Dissertation von W. BLASCHKE.*

§ 11. *Die aequidistanten Pfeiltransformationen.*

Um den Zusammenhang zwischen der MOEBIUSschen Geometrie und der parazyklischen bis zu einem gewissen Grade zu erschöpfen, werfen wir noch einen kurzen Blick auf die Differentialgeometrie im Pfeilgebiet der hyperbolischen Ebene und zeigen das Vorhandensein einer *unendlichen* Gruppe von Pfeiltransformationen, die dieselbe Rolle spielt, wie in der MOEBIUSschen Geometrie die *konforme* Gruppe.

Wir führen *inhomogene* Pfeilparameter ein:

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \qquad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Dadurch erleiden die folgenden Entwicklungen Einschränkungen, mit deren Angabe wir uns aber nicht aufhalten wollen.

Ein Pfeil (λ, μ) *schneidet* einen benachbarten $(\lambda + d\lambda, \mu + d\mu)$, wenn $d\mu : d\lambda$ positiv ist. Zwei dem Pfeil (λ, μ) benachbarte Pfeile $(\lambda + d_1\lambda, \mu + d_1\mu)$ und $(\lambda + d_2\lambda, \mu + d_2\mu)$ bestimmen eine Strecke η:

$$\operatorname{tgh} \eta = \frac{d_1\lambda \cdot d_2\mu - d_2\lambda \cdot d_1\mu}{d_1\lambda \cdot d_2\mu + d_2\lambda \cdot d_1\mu}.$$

Ist $d_1\mu : d_1\lambda > 0$, $d_2\mu : d_2\lambda > 0$, so ist η die Länge der Strecke, die auf dem ursprünglichen Pfeil von den beiden benachbarten abgeschnitten wird.

Für $d_1\mu : d_1\lambda < 0$, $d_2\mu : d_2\lambda < 0$ bestimmt jeder benachbarte Pfeil mit dem ursprünglichen eine gemeinsame Normale; η ist dann der Abstand dieser beiden Geraden.

Ist endlich $d_1\mu : d_1\lambda > 0$, $d_2\mu : d_2\lambda < 0$, und bezeichnet η' den Abstand des Schnittpunktes $(\lambda, \mu; \lambda_1 + d_1\lambda, \mu + d_1\mu)$ von der gemeinsamen Normalen $(\lambda, \mu; \lambda + d_2\lambda, \mu + d_2\mu)$, so ist

$$\frac{d_1\lambda \cdot d_2\mu - d_2\lambda \cdot d_1\mu}{d_1\lambda \cdot d_2\mu + d_2\lambda \cdot d_1\mu} = \coth \eta'.$$

* W. BLASCHKE, *Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der Euklidischen Ebene;* Monatshefte für Mathematik und Physik, 21. Jahrgang (1910). Herr BLASCHKE war so liebenswürdig, zu unserm Aufsatze die Figuren zu zeichnen.

Man erhält nun sofort den interessanten Satz:

Jede Pfeiltransformation

$$\lambda' = F(\lambda), \qquad \mu' = \phi(\mu), \quad (\textit{parakonforme} \text{ Transformation})$$

die α-parallele (ω-parallele) Pfeile in ebensolche überführt, ebenso jede Pfeiltransformation

$$\lambda' = F(\mu), \qquad \mu' = \phi(\lambda), \quad (\textit{antiparakonforme} \text{ Transformation})$$

die α-Parallelismus und ω-Parallelismus vertauscht, ist aequidistant.

Dabei bedeuten F und ϕ irgend welche differenzierbaren Funktionen von λ bezw. μ; aber sie müssen umkehrbar sein, d. i. es müssen durch die beiden im letzten Satze angegebenen Gleichungen wirklich nicht-ausgeartete Transformationen geliefert werden. Diese Transformationen lassen also den Abstand zweier Punkte (Punktzykel) invariant.

Man kann die eben erklärte, *parakonforme* Gruppe noch anders darstellen, wobei der Zusammenhang mit der konformen Gruppe evident wird.

Dazu bedienen wir uns eines komplexen Zahlsystems in zwei Haupteinheiten e_λ und e_μ, dessen Multiplikationsregel durch folgende Gleichungen definiert ist:

$$e_\lambda^2 = e_\lambda, \qquad e_\lambda \cdot e_\mu = e_\mu \cdot e_\lambda = 0, \qquad e_\mu^2 = e_\mu.$$

Dann bilden wir aus Pfeilparametern die komplexen Zahlen

$$z = \lambda \cdot e_\lambda + \mu \cdot e_\mu, \qquad \bar{z} = \mu \cdot e_\lambda + \lambda \cdot e_\mu,$$

deren zweite als zur ersten konjugiert-komplex bezeichnet werden darf. Funktionen dieser komplexen Variabeln werden definiert als Summen von Potenzreihen. Dann lässt sich die parakonforme Gruppe einfach schreiben:

$$z' = f(z), \qquad z' = f(\bar{z}).$$

Auch diese Schreibweise wollen wir noch etwas modifizieren. Setzt man nämlich

$$e_\lambda + e_\mu = 1, \qquad 2\xi = \lambda + \mu,$$
$$e_\lambda - e_\mu = \epsilon, \qquad 2\eta = \lambda - \mu,$$

so erhalten wir:

$\xi' + \epsilon\eta' = f(\xi + \epsilon\eta),$	$\xi' + \epsilon\eta' = f(\xi - \epsilon\eta),$
Parakonforme Transformationen.	*Antiparakonforme* Transformationen.

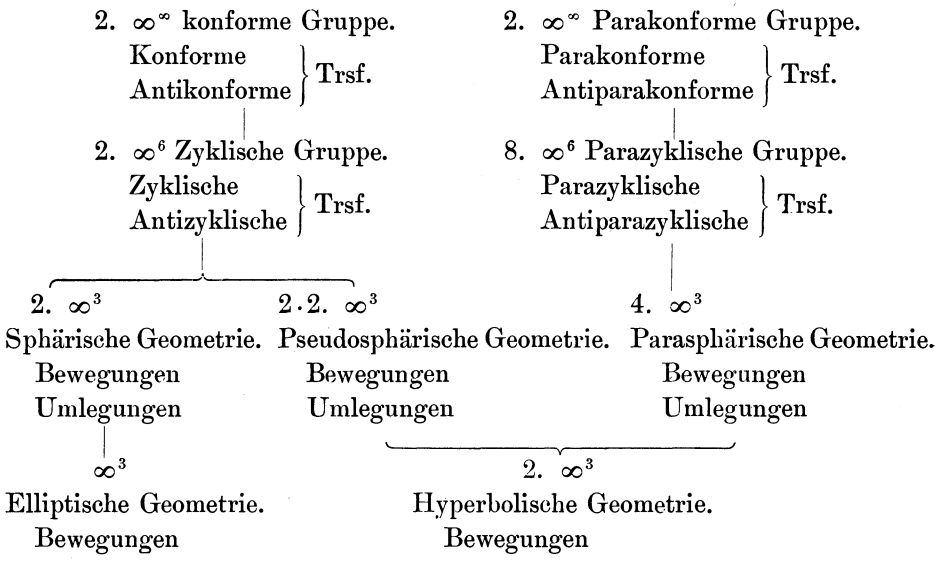
$$\epsilon^2 = +1.$$

Ebenso wie die konforme Gruppe von Punkttransformationen *winkeltreu* ist, ist also die parakonforme Gruppe von Pfeiltransformationen in gewissem Sinne *längentreu*.

In der elliptischen Pfeilgeometrie gedeutet, ist die konforme Gruppe aber ebenfalls längentreu.

Ein korrekter Ausbau dieser hier nur oberflächlich gestreiften Dinge bietet keinerlei Schwierigkeiten. Bemerkt werden muss aber, dass die Benutzung der hier aufgetretenen komplexen Grössen nicht immer vorteilhaft ist.

Wir können jetzt die Pfeilgeometrie in ihrer ganzen Struktur erkennen und stellen die aufgetretenen Gruppen denen der MOEBIUSschen Geometrie gegenüber.



Die aequidistanten Transformationen der Euklidischen Ebene können aus der parakonformen Gruppe durch einen Grenzübergang erhalten werden. Die fragliche unendliche Gruppe ist von Herrn G. SCHEFFERS bestimmt worden; sie führt auf das dritte System komplexer Zahlen in zwei Einheiten, welches von Herrn E. STUDY in der Geometrie der Dynamen verwandt ist.

HANNOVER, 2. *Mai.* 1909.